Algèbre Linéaire et Applications

Kevin Cheung, Mathieu Lemire

2018-07-16

Table des matières

Préface **7**

Notation **9**

Partie I **13**

1 Éléments de base **13**
1.1 Ensembles 13
1.2 Uplets et matrices 17
1.3 Corps 20
1.4 Corps fini dont l'ordre est la puissance d'un nombre premier 25
1.5 Exemple de test portant sur la matière de ce chapitre 28

2 Nombres complexes **31**
2.1 Partie réelle et partie imaginaire 31
2.2 Arithmétique 34
2.3 Module et conjugué d'un nombre complexe 39
2.4 Forme polaire 42
2.5 Racine n-ième 47
2.6 Formule d'Euler 50
2.7 Exemple de test portant sur la matière de ce chapitre 52

3 Résolution de systèmes d'équations linéaires **57**
3.1 Définition 57
3.2 Méthode de la substitution 62
3.3 Opérations élémentaires 65
3.4 Représentation matricielle 68
3.5 Combinaison linéaire de colonnes 72
3.6 Matrice augmentée associée à un système 75

3.7 Forme échelonnée réduite . . . 81
3.8 Élimination de Gauss-Jordan . . . 86
3.9 Décrire les ensembles solutions . . . 92
3.10 Exemple de test portant sur la matière de ce chapitre . . . 97

4 Matrices **103**
4.1 Multiplication de matrices . . . 103
4.2 Associativité de la multiplication de matrices . . . 107
4.3 Matrice identité . . . 110
4.4 Matrices élémentaires . . . 112
4.5 Exemples de matrices élémentaires . . . 116
4.6 Résolution d'équations matricielles . . . 120
4.7 Matrices inverses . . . 123
4.8 Calcul de l'inverse d'une matrice carrée . . . 126
4.9 L'inverse d'un produit de matrices . . . 129
4.10 Matrices singulières . . . 134
4.11 Propriétés des matrices . . . 137
4.12 Exemple de test portant sur la matière de ce chapitre . . . 142

5 Déterminant **149**
5.1 Permutations . . . 149
5.2 Définition . . . 153
5.3 Matrices spéciales . . . 157
5.4 Propriétés fondamentales . . . 161
5.5 Méthodes efficaces . . . 164
5.6 Règle de Cramer . . . 168
5.7 Exemple de test portant sur la matière de ce chapitre . . . 172

6 Espaces vectoriels **175**
6.1 Motivation . . . 176
6.2 Définition d'un espace vectoriel . . . 181
6.3 Espaces vectoriels communément rencontrés . . . 185
6.4 Sous-espaces . . . 187
6.5 Combinaison linéaire et espace engendré . . . 190
6.6 Espaces vectoriels de dimension infinie . . . 194
6.7 Indépendance linéaire . . . 194
6.8 Base et dimension . . . 199
6.9 Dimensions de sous-espaces . . . 203
6.10 Retour sur le noyau d'une matrice . . . 207

6.11 Espace des colonnes et espace des lignes . . . 210
6.12 Rang d'une matrice . . . 214
6.13 Représentation par les uplets . . . 216
6.14 Changement de base . . . 219
6.15 Exemple de test portant sur la matière de ce chapitre . . . 225

7 Valeurs propres et vecteurs propres 231
7.1 La magie des puissances de matrices . . . 231
7.2 Définitions . . . 235
7.3 Multiplicités algébriques et géométriques . . . 239
7.4 Diagonalisation . . . 243
7.5 Matrices symétriques et hermitiennes . . . 249
7.6 Exemple de test portant sur la matière de ce chapitre . . . 252

Partie II 259

8 Transformations linéaires 259
8.1 Définition . . . 260
8.2 Noyau d'une application linéaire . . . 264
8.3 Surjectivité et injectivité . . . 266
8.4 Bijections et isomorphismes . . . 270
8.5 Matrice d'une application linéaire . . . 275
8.6 Retour sur les changements de bases. . . . 280
8.7 Espace dual . . . 282
8.8 Exemple de test portant sur la matière de ce chapitre . . . 285

9 Produits scalaires 287
9.1 Produit scalaire usuel . . . 287
9.2 Forme bilinéaire symétrique . . . 292
9.3 Produit scalaire . . . 296
9.4 Exemple de test portant sur la matière de ce chapitre . . . 300

10 Orthogonalité 301
10.1 Bases orthonormées . . . 301
10.2 Procédé de Gram-Schmidt . . . 306
10.3 Sous-espaces orthogonaux . . . 311
10.4 Somme directe . . . 315
10.5 Projection orthogonale . . . 318
10.6 Décomposition QR . . . 321

10.7 Diagonalisation en base orthonormée 325
10.8 Fonctions quadratiques 331
10.9 Exemple de test portant sur la matière de ce chapitre 337

11 Projection **339**
11.1 Cas d'une matrice de plein rang 339
11.2 Pseudo-inverse 342
11.3 Cas général 345
11.4 Exemple de test portant sur la matière de ce chapitre 349

12 Méthode des moindres carrés **351**
12.1 Résolution de système inconsistant 351
12.2 Cas à une seule variable 355
12.3 Cas général 358
12.4 Équation normale 362
12.5 Ajustement de courbe par la méthode des moindres carrés 365
12.6 Exemple de test portant sur la matière de ce chapitre 370

13 Décomposition en valeurs singulières **371**
13.1 Motivation 371
13.2 Valeurs singulières 376
13.3 Démonstration et exemples 379
13.4 Retour sur la méthode des moindres carrés 384
13.5 Exemple de test portant sur la matière de ce chapitre 388

14 Applications **389**
14.1 Graphisme dans le plan 389
14.2 Différentiation de polynômes 394
14.3 Approximation pour une matrice de rang inférieur 396
14.4 « Lights Out » 398
14.5 Codes de correction d'erreurs 409
14.6 Systèmes d'inéquations linéaires 413

Bibliographie **423**

Préface

Le but de ce manuel est de donner une base solide en algèbre linéaire aux étudiants ayant l'intention de poursuivre des études dans des domaines appliqués des sciences, de ingénierie et des statistiques. Ce manuel est divisé en deux parties. La partie I est une introduction à l'algèbre linéaire. La partie II aborde des sujets de niveaux intermédiaire, culminant à une discussion sur la décomposition en valeurs singulières, qui est devenu un puissant outil d'analyse des données et d'applications en ingénierie. Le manuel se termine par que quelques applications.

Ce manuel met l'accent sur les méthodes de calcul et les résultats. À quelques exceptions près, les aspects théoriques des sujets discutés sont aussi traités en détail. Il est ainsi possible de choisir combien de temps consacrer aux aspects théoretiques de chaque sujet.

Le développement de ce manuel a été soutenu et financé par eCampusOntario.

 Ce manuel est mise à disposition selon les termes de la Licence Creative Commons Attribution 4.0 International.

Notation

L'ensemble des nombres réels est dénoté par $\mathbb{R}$. L'ensemble des nombres rationnels est dénoté par $\mathbb{Q}$. L'ensemble des nombres entiers est dénoté par $\mathbb{Z}$.

L'ensemble des n-uplets dont les éléments sont des nombres réels est dénoté par $\mathbb{R}^n$. Des définitions similaires sont aussi vraies pour $\mathbb{Q}^n$ et $\mathbb{Z}^n$.

L'ensemble des matrices de taille $m \times n$ (c'est-à-dire les matrices ayant m lignes et n colonnes) ayant des éléments réels est dénoté par $\mathbb{R}^{m \times n}$. Des définitions similaires sont aussi vraies pour $\mathbb{Q}^{m \times n}$ et $\mathbb{Z}^n$.

Tous les n-uplets sont écrit en tant que colonnes (donc, comme une matrice de dimension $n \times 1$). Un n-uplet est normalement représenté par une lettre minuscule en gras, tel que $\mathbf{x}$. Pour un n-uplet $\mathbf{x}$, x_i dénote le i-ième élément (ou composante) de $\mathbf{x}$ pour $i = 1, \ldots, n$. Un n-uplet dont toutes les composantes sont nulles est dénoté par $\mathbf{0}$. La dimension du uplet est déterminée selon le contexte.

Les matrices sont généralement représentées par une lettre majuscule en gras, tel que $\mathbf{A}$. La j-ième colonne de la matrice $\mathbf{A}$ est dénoté par $\mathbf{A}_j$ et l'élément (i, j) (l'élément dans la i-ième ligne et la j-ième colonne) est dénoté a_{ij}.

Les scalaires sont généralement représentés par des lettres grecques en minuscule, telles que λ, α, β etc.

Pour une matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ dénote la transposé de $\mathbf{A}$. Pour un n-uplet $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^\mathsf{T}$ dénote la transposé de $\mathbf{x}$.

Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des matrices $m \times n$, $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$ signifie que $a_{ij} \geq b_{ij}$ pour tout $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Des définitions semblables sont vraies pour $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, $\mathbf{A} < \mathbf{B}$ et $\mathbf{A} > \mathbf{B}$. En particulier, si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont des n-uplets, $\mathbf{u} \geq \mathbf{v}$ signifie $u_i \geq v_i$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $\mathbf{u} > \mathbf{0}$ signifie que $u_i > 0$ pour $i = 1, \ldots, n$.

Les exposants entre parenthèse sont utilisés afin d'indexer les uplets. Par exemple, $\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)} \in \mathbb{R}^3$ indique que $\mathbf{u}^{(1)}$ et $\mathbf{u}^{(2)}$ sont des éléments de $\mathbb{R}^3$. Le deuxième élément de $\mathbf{u}^{(1)}$ est dénoté par $u_2^{(1)}$.

Partie I

Chapitre 1

Éléments de base

Ce chapitre couvre certaines notions fondamentales requises pour ce livre. La maîtrise du matériel dans ce chapitre est essentielle. Les notions abordées sont les ensembles, les uplets, les matrices et les corps. La maîtrise du matériel de ce chapitre permet de :

— Spécifier les ensembles de différentes façons.
— Reconnaître des ensembles spéciaux.
— Effectuer des opérations sur les ensembles.
— Définir un corps.
— Faire de l'arithmétique dans les corps les plus communément utilisés.
— Spécifier les uplets et les matrices.
— Faire de l'arithmétique avec les uplets.

Pour ce chapitre, les connaissances requises incluent le matériel étudié dans le cours de fonctions avancées de la 12ième année en Ontario.

1.1 Ensembles

Un **ensemble** est une collection d'objets distincts qui sont bien définis. Les objets d'un ensemble sont appelés **élements** ou **membres** de l'ensemble.

Il est possible de spécifier un ensemble de plusieurs façons :

— en donnant une règle ou une description verbale. Par exemple, on peut décrire l'ensemble A de la façon suivante « A l'ensemble de tous les entiers impairs ».
— en mettant une liste d'éléments entre parenthèses. Par exemple, $\{2, 4, 5\}$ dénote l'ensemble contenant les trois nombres 2, 4 et 5. $\{1, 3, 5, \ldots, 99\}$ dénote l'ensemble des nombres impaires de 1 jusqu'à 99.

— en utilisant la notation pour la construction d'ensembles : $\{f(x) : P(x)\}$ où $f(x)$ est une expression utilisant x et $P(x)$ est une propriété satisfaite par x. Pour chaque x tel que $P(x)$ est vrai, $f(x)$ est une élément de l'ensemble. Par exemple, $\{2n : n \text{ est un entier}\}$.

Voici les symboles associés à certains ensembles communs :

— $\emptyset$ dénote **l'ensemble vide**, l'ensemble n'ayant aucun membre.
— $\mathbb{N}$ dénote l'ensemble des nombres naturels, c'est-à-dire $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. (Notez que certaines références excluent le 0 comme un entier naturel.)
— $\mathbb{Z}$ dénote l'ensemble des entiers relatifs, c'est-à-dire $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
— $\mathbb{Q}$ dénote l'ensemble des nombres rationnels.
— $\mathbb{R}$ dénote l'ensemble des nombres réels.
— $\mathbb{C}$ dénote l'ensemble des nombres complexes.

1.1.1 Égalité entre ensembles

Deux ensembles A et B sont dits **égaux**, dénoté par $A = B$, si A et B contiennent les mêmes éléments. Autrement dit, leur égalité ne dépend pas de la façon dont ils sont définis.

Par exemple, si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{(-1)^2, \sqrt{4}, \log_2 8\}$, alors $A = B$ même si A et B *semblent*, en surface, contenir des éléments différents.

En général, afin de démontrer que $A = B$, nous devons démontrer deux choses : $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$; c'est-à-dire, $x \in A$ si et seulement si $x \in B$. Nous verrons des preuves utilisant les ensembles plus tard.

1.1.2 Notations communes pour les ensembles

Soient A et B des ensembles.

— $|A|$, la **cardinalité** de A, dénote le nombre d'éléments de A. Par exemple, si $A = \{(1, 2), (3, 4)\}$, alors $|A| = 2$.
— $A = B$ si et seulement si ils ont précisément les mêmes éléments. Par exemple, si $A = \{4, 9\}$ et $B = \{n^2 : n = 2 \text{ or } n = 3\}$, alors $A = B$.
— $A \subseteq B$ si et seulement si chaque éléments de A est aussi un élément de B. On dit alors que A est un **sous-ensemble** de B. Par exemple, $\{1, 8, 1107\} \subseteq \mathbb{N}$.
— $a \in A$ signifie que a est un membre de A. Par exemple, $5 \in \mathbb{Q}$
— $a \notin A$ signifie que a n'est pas une membre de A. Par exemple, $\frac{2}{7} \notin \mathbb{Z}$

— $A \cap B$ dénote l'ensemble contenant les élément qui sont à la fois dans A et dans B, que l'on dénomme **l'intersection** de A et de B. Par exemple, si $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 3\}$, alors $A \cap B = \{2\}$.

— $A \cup B$ dénote l'ensemble contenant les éléments qui sont soit dans A ou dans B ou dans les deux, que l'on dénomme **l'union** de A et de B. Par exemple, si $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 3\}$, alors $A \cup B = \{1, 2, 3\}$.

— $A \backslash B$ dénote l'ensemble contenant les éléments qui sont dans A mais pas dans B, $A \backslash B$ se lit « A sans B ». Par exemple, si $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 3\}$, alors $A \backslash B = \{1\}$.

Exercices

1. Soit $A = \{1, 3, 5, 7\}$ et $B = \{0, 3, 6, 7, 9\}$. Décrivez les ensembles suivants : $A \cup B$, $A \cap B$ et $A \backslash B$.
2. Lequel des nombres suivants est membre de $\mathbb{Q} \cap \{a : a \in \mathbb{R} \text{ et } a > \sqrt{2}\}$?
   a. 0
   b. 5
   c. $\sqrt{3}$

Solutions

1. Les ensembles sont :
   — $A \cup B = \{0, 1, 3, 5, 6, 7, 9\}$
   — $A \cap B = \{3, 7\}$
   — $A \cup B = \{1, 5\}$
2. a. Pas un membre.
   b. Est un membre.
   c. Pas un membre.

1.2 Uplets et matrices

Soit A un ensemble. Soient m et n des entiers positifs.

Un n-**uplet dont les éléments appartiennent à** A est un tableau à 1 dimension de n éléments de A. L'ensemble de tous les n-uplets dont les éléments appartiennent à A est dénoté par A^n. Un n-uplet $\mathbf{x} \in A^n$ s'écrit comme une colonne d'éléments :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Exemple 1.1. Le 2-uplet $\begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix}$ est un élément de $\mathbb{Z}^2$.

Une **matrice de taille** $m \times n$ **dont les éléments appartiennent à** A est un tableau à 2 dimensions d'éléments $a_{i,j}$, où $i = 1, \ldots, m$ et $j = 1, \ldots, n$. (Parfois, on écrit a_{ij} plutôt que $a_{i,j}$ si l'absence de la virgule ne porte pas à confusion.) L'ensemble de toutes les matrices de taille $m \times n$ dont les éléments appartiennent à A est dénoté par $A^{m \times n}$. Une matrice $\mathbf{X} \in A^{m \times n}$ est écrit comme un tableau d'éléments ayant m lignes et n colonnes à l'intérieur de parenthèses carrées :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ x_{m,1} & x_{m,2} & \cdots & x_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Exemple 1.2. L'ensemble $\mathbb{Q}^{2 \times 3}$ contient entre autre les matrices suivantes : $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0.5 & 4 \end{bmatrix}$,

Remarque. Un n-uplet est effectivement une matrice de taille $n \times 1$.

1.2.1 Arithmétique des uplets

Soient un ensemble A et n un entier positif.

Si A est un ensemble muni d'une addition et d'une multiplication de deux éléments, alors **l'addition d'uplet** et **la multiplication par un scalaire** peuvent être définis pour A^n de la façon suivante :

Pour $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A^n$, où n est un entier positif, $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ est le n-uplet dont le i-ième élément est donné par $x_i + y_i$, pour $i = 1, \ldots, n$.

Exemple 1.3.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4 \\ 2+5 \\ 3+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Pour $\mathbf{x} \in A^n$ un n-uplet et α un nombre, alors, $\alpha\mathbf{x}$ est le n-uplet obtenu de $\mathbf{x}$ en multipliant chaque élément par α.

Exemple 1.4.

$$2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 \\ 2 \times 2 \\ 2 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Exemple 1.5.

$$\sqrt{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Notons que si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont des n-uplets de nombres, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ est défini par $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}$, ce qui mène à la notion de **soustraction d'uplets**.

Exemple 1.6.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Exercices

1. Simplifiez $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
2. Simplifiez $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solutions

1. $\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$.
2. Notons que

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2-0 \\ 3-1 \\ 1-4 \\ 0-0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2+2 \\ 2+0 \\ -3+2 \\ 0+2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

1.3 Corps

Cette section est consacrée aux corps. Nous n'allons pas traiter du sujet en profondeur puisque son étude pouvant facilement demander un ouvrage complet. Pour nos besoins, nous allons seulement nous familiariser avec la terminologie ainsi qu'à quelques exemples de corps.

1.3.1 Opposés et inverses

Avant de discuter des propriétés d'un corps, il est très instructif de considérer les ensembles des nombres en ignorant la soustraction et la division. Autrement dit, nous restreignons notre attention à l'addition et à la multiplication. Pour combler la perte de ces opérateurs, nous utilisons les notions **d'opposé** et **d'inverse**. La connaissance de ces notions est cruciale à la compréhension du fait que les éléments des corps n'ont pas à être des nombres.

Pour un élément a d'un corps, son **opposé** est un élément b appartenant à ce même corps et tel que $a + b = b + a = 0$. Il s'avère qu'un unique opposé existe pour chaque élément. Par exemple, dans le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, l'opposé de $\frac{2}{5}$ est $-\frac{2}{5}$ et l'opposé de -5 est 5. On dénote l'opposé de a par $-a$.

Pour un élément $a \neq 0$ d'un corps, son **inverse** est un élément b tel que $a \cdot b = b \cdot a = 1$. Il s'avère qu'un unique inverse existe pour chaque élément. Dans $\mathbb{Q}$, par exemple, l'inverse de $\frac{2}{5}$ est $\frac{5}{2}$ et l'inverse de -1 est -1. On dénote l'inverse de a par a^{-1}.

Or, on voit pourquoi il n'est pas nécessaire de parler de soustraction et de division. On peut tout simplement réécrire $a - b$ pour a plus l'opposé de b (normalement dénoté par $a + (-b)$), et a/b pour a multiplié par l'inverse de b (normalement dénoté par $a \cdot b^{-1}$).

Exemple 1.7. Montrons que l'inverse de $3 - \sqrt{7}$ peut s'écrire sous la forme $a + b\sqrt{7}$, où $a, b \in \mathbb{Q}$.

La condition que l'inverse s'écrive sous la forme $a + b\sqrt{7}$, où $a, b \in \mathbb{Q}$ rend la tâche plus difficile : $3 - \sqrt{7}$ étant un nombre réel, son inverse est simplement $\frac{1}{3-\sqrt{7}}$. Cependant, $\frac{1}{3-\sqrt{7}}$ n'est pas de la forme demandée.

Heureusement, nous pouvons employer la rationalisation du dénominateur comme suit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{3-\sqrt{7}} &= \frac{1}{3-\sqrt{7}} \cdot \frac{3+\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}} \\ &= \frac{3+\sqrt{7}}{3^2-\sqrt{7}^2} \\ &= \frac{3+\sqrt{7}}{9-7} \\ &= \frac{3+\sqrt{7}}{2} \\ &= \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{7}.\end{aligned}$$

Notons que $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{7}$ est de la forme désirée.

Remarque. En utilisant la même technique, il est possible de démontrer plus généralement que pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$ et nombre premier p, si $x+y\sqrt{p} \neq 0$, alors son inverse peut s'écrire comme $a+b\sqrt{p}$ pour un choix judicieux de $a, b \in \mathbb{Q}$.

1.3.2 Axiomes d'un corps

Sous l'addition et la multiplication, l'ensemble des nombres rationnels et l'ensemble des nombres réels partagent plusieurs propriétés communes. Ce qui est peut-être surprenant est que beaucoup de ces propriétés sont aussi partagés par des ensembles muni d'une multiplication et d'une addition bien très différentes de celles des nombres réels. Au fil des ans, les propriétés essentielles ont été identifiées, menant à la définition abstraite d'un corps. Puisqu'il existe de nombreux exemples de corps, l'étude des corps et de leurs propriétés permettent de déduire ce qui reste vrai dans tous les cas sans à avoir à les étudier séparément.

Plus formellement, un **corps** $\mathbb{K}$ est un ensemble muni de deux opérations binaires $+$ et $\cdot$ (que l'on nomme addition et multiplication, respectivement) et qui est fermé sous l'action de ces opérations (si $a, b \in \mathbb{K}$, alors $a+b, a \cdot b \in \mathbb{K}$) tout en satisfaisant les **axiomes d'un corps** :

1. Pour tous $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a+(b+c) = (a+b)+c$ et $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
   (Associativité de l'addition et de la multiplication.)
2. Pour tous $a, b \in \mathbb{K}$, $a+b = b+a$ et $a \cdot b = b \cdot a$.
   (Commutativité de l'addition et de la multiplication.)
3. Pour tous $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.
   (Distributivité à la gauche.)

4. Il existe un élément de $\mathbb{K}$, dénoté par 0, tel que pour tous $a \in \mathbb{K}, a + 0 = a$.
   (Existence d'un élément neutre pour l'addition.)
5. Il existe un élément de $\mathbb{K}$, non égal à 0 et dénoté par 1, tel que pour tout $a \in \mathbb{K}, a \cdot 1 = a$.
   (Existence d'un élément neutre pour la multiplication.)
6. Pour chaque $a \in \mathbb{K}$, il existe un élément $b \in \mathbb{K}$, tel que $a + b = 0$.
   (Existence d'un opposé, souvent dénoté par $-a$.)
7. Pour chaque $a \in \mathbb{K}$, non égal à 0, il existe un élément $b \in \mathbb{K}$, tel que $a \cdot b = 1$.
   (Existence d'un inverse, souvent dénoté par a^{-1}.)

Par commodité, on écrit souvent ab au lieu de $a \cdot b$.

On peut dériver de ces propriétés qu'un corps doit aussi satisfaire aussi à la distributivité à droite :

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + a \cdot c$$

pour tous $a, b, c \in \mathbb{K}$. On peut aussi montrer que les éléments neutres pour addition et la multiplication sont uniques.

Notons que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ satisfont aux propriétés et sont donc des corps. Nous verrons plus tard que les nombres complexes forment aussi un corps. Dans la section suivante, nous considérons des corps ayant un nombre fini d'éléments.

Remarque. Si la propriété 7 est omise, on a la définition d'un **anneau**. Par exemple, l'ensemble des nombres entiers relatifs $\mathbb{Z}$ muni de l'addition et de la multiplication satisfait aux propriétés 1 à 6 mais pas à la propriété 7. Ainsi, $\mathbb{Z}$ n'est pas un corps mais il est un anneau.

1.3.3 Puissance d'éléments d'un corps

Soit $a \in \mathbb{K}$, où $\mathbb{K}$ dénote un corps. Par convention, nous définissons $a^0 = 1$, l'élément neutre pour la multiplication de $\mathbb{K}$. Pour chaque entier positif n, $a^n = a \cdot a^{n-1}$ et, si $a \neq 0$, a^{-n} est l'inverse de a^n.

Exercices

1. Pour chacun des éléments suivants, déterminez ses opposés et inverses.
   a. $\frac{3}{2}$
   b. -5

c. $-\sqrt{2}$

2. Donnez l'inverse de $-2+\sqrt{5}$ sous la forme $a+b\sqrt{5}$, où $a, b \in \mathbb{Q}$.
3. Soient $a, b \in \mathbb{K}$, où $\mathbb{K}$ dénote un corps. Soit n un entier positif. Démontrez que $(ab)^n = a^n b^n$.
4. Soit $a \in \mathbb{K}$, où $\mathbb{K}$ dénote un corps. Soit n un entier positif. Démontrez que $a^{-n} = (a^{-1})^n$.

Solutions

1. a. L'opposé est $-\frac{3}{2}$. L'inverse est $\frac{2}{3}$.

   b. L'opposé est 5. L'inverse est $-\frac{1}{5}$.

   c. L'opposé est $-\sqrt{2}$. L'inverse est $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. $2+\sqrt{5}$

3. Démontrons l'énoncé par induction sur n. L'énoncé est évidemment vrai si $n=1$. Supposons maintenant que $(ab)^k = a^k b^k$ pour un entier positif k. Alors

$$\begin{aligned}(ab)^{k+1} &= (ab)(ab)^k \\ &= (ab)(a^k b^k)\end{aligned}$$

   d'après l'hypothèse d'induction. Puisque

$$\begin{aligned}(ab)(a^k b^k) &= a((ba^k)b^k) \\ &= a((a^k b)b^k) \\ &= a(a^k(bb^k)) \\ &= a(a^k b^{k+1}) \\ &= (aa^k)b^{k+1} \\ &= a^{k+1}b^{k+1},\end{aligned}$$

   il vient $(ab)^{k+1} = a^{k+1}b^{k+1}$.

   Ainsi, d'après le principe d'induction, l'égalité $(ab)^n = a^n b^n$ est valide pour tous les entiers positifs n.

4. Puisque $a \neq 0$, nous savons que a^{-1} existe et que $a^{-1}a = 1$. Soit $b = \left(a^{-1}\right)^n$. Alors $ba^n = \left(a^{-1}\right)^n a^n = \left(a^{-1}a\right)^n = 1^n = 1$. Par définition, b est alors l'inverse de a.

1.4 Corps fini dont l'ordre est la puissance d'un nombre premier

Pour un nombre premier p, on peut construire un corps $GF(p)$ ayant p éléments comme suit :

- Les éléments du corps sont $0, 1, \ldots, p-1$.
- La somme $a+b$ de deux éléments $a, b \in GF(p)$ est donné par le reste de la somme des entiers a et b, divisée par p. Par exemple, dans $GF(7)$, $6+4=3$ puisque la somme des entiers 6 et 4 est 10, et que le reste de 10 lorsque divisé par 7 est 3.
- Le produit $a \cdot b$ (ou tout simplement ab) de deux éléments $a, b \in GF(p)$ est donné par le reste du produit des entiers a et b, divisé par p. Par exemple, dans $GF(5)$, $3 \cdot 2 = 1$ puisque le produit des entiers 3 et 2 est 6, ce qui laisse un reste de 1 lorsque divisé par 5.

Exemple 1.8. Dans $GF(2)$, les seuls éléments sont 0 et 1. La multiplication est la multiplication normale des nombres et l'addition est presque la même operation que l'addition normale des nombres, avec l'exception notable que $1+1=0$. L'élément 1 est donc son propre opposé dans $GF(2)$.

Exemple 1.9. La table de multiplication de $GF(5)$ est donnée par :

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

S'il n'est pas trop difficile de constater que les opposés existent dans $GF(p)$, l'existence d'inverses découle du résultat de la théorie des nombres suivant :

Théorème 1.1. *Soit p un nombre premier. Si $a \in \{1, \ldots, p-1\}$, alors il existe $b \in \{1, \ldots, p-1\}$ pour lequel ab donne un reste de 1 lorsque divisé par p.*

Remarque. Les corps finis ayant p^k éléments, où p est un nombre premier et k est un entier positif, existent. Cependant, leurs constructions dépasse le niveau de cet ouvrage.

Exercices

1. Construisez la table de multiplication de $GF(3)$.
2. Démontrez le théorème 1.1.

Solutions

1. Le tableau suivant donne la table de multiplication de $GF(3)$:

	0	**1**	**2**
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

2. Notons que si $d \in \{1, \ldots, p-1\}$, alors ad n'est pas divisible par p, ce dernier étant primer. Le quotient de ad par p n'est donc pas un entier.
   Soient $c, d \in \{1, \ldots, p-1\}$, où $c < d$. Si ac et ad donnent le même reste lorsque divisés par p, alors $a(d-c)$ est divisible par p. Ceci est impossible car p est un nombre premier et a et $d-c$ sont des éléments de $\{1, \ldots, p-1\}$. Ainsi, $a, 2a, \ldots, a(p-1)$ donne $p-1$ restes distincts et non nuls, lorsqu'ils sont divisés par p. Puisqu'il y a exactement $p-1$ tels restes, il doit y avoir un élément parmi $a, 2a, \ldots, a(p-1)$ qui donne le reste recherché lorsque divisé par p.

1.5 Exemple de test portant sur la matière de ce chapitre

1. Soit $\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ un 3-uplet ayant des éléments de $\mathbb{R}$. Quel valeur prend t_2^2?
2. Écrivez tous les éléments de l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \,:\, (n-2)^2 \leq 10\}$.
3. Écrivez tous les éléments de l'ensemble de $\left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^2 \,:\, |a+b| = 1,\ a \geq 0,\ b \geq -1 \right\}$.
4. Évaluez l'expression $2 + (2 \cdot (1+1))$ de $GF(3)$.
5. Donnez l'inverse de $4 - \sqrt{5}$ sous la forme $a + b\sqrt{5}$, où $a, b \in \mathbb{Q}$.

Solutions

1. Utilisons l'arithmétique des uplets pour obtenir la forme la plus simple possible :

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\-2\\2\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}2\\-1\\4\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

   Donc, $t_2^2 = (-1)^2 = 1$.

2. Notons que si $n \in \mathbb{N}$, alors $k = n - 2$ est un entier relatif. Les seules entiers relatifs pour lesquels $k^2 \leq 10$ sont $0, 1, 4, 9$. Donc, les valeurs possible de k sont $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$. Puisque $n = k + 2$ doit être un nombre naturel, les éléments de l'ensemble sont $1, 2, 3, 4, 5$.

3. Nous considérons deux cas, dépendant de la valeur de b.

   Cas 1. $b \geq 0$. Puisque $a \geq 0$, $|a + b| = 1$ devient tout simplement $a + b = 1$. Puisque a et b doivent être des entiers non négatifs, on doit avoir

$$a = 0, b = 1,$$

   ou

$$a = 1, b = 0.$$

   Cas 2. $b = -1$. Puisque a doit satisfaire à $|a - 1| = 1$, les seuls possibilités sont $a = 0$ et $a = 2$.

   En combinant les deux cas, on voit que les seuls éléments de l'ensemble sont $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$, et $\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$.

4. $2 + (2 \cdot (1 + 1)) = 2 + (2 \cdot 2) = 2 + 1 = 0$

5. Rappelons que l'inverse de $4 - \sqrt{5}$ est un nombre α tel que $\alpha(4 - \sqrt{5}) = 1$. Dans cette question, nous devons exprimer α sous la forme $a + b\sqrt{5}$, où $a, b \in \mathbb{Q}$.

   Donc, on doit trouver $a, b \in \mathbb{Q}$ tels que $(a + b\sqrt{5})(4 - \sqrt{5}) = 1$.

   Notons que

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{5})(4 - \sqrt{5}) &= a(4 - \sqrt{5}) + b\sqrt{5}(4 - \sqrt{5})\\ &= 4a - a\sqrt{5} + 4b\sqrt{5} - 5b\\ &= (4a - 5b) + (-a + 4b)\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Ainsi, on doit avoir $(4a - 5b) + (-a + 4b)\sqrt{5} = 1$. Puisque $\sqrt{5}$ est irrationnel et que $-a + 4b$ est rationnel, on doit avoir $-a + 4b = 0$. Ceci veut dire que l'on doit avoir $4a - 5b = 1$.

Si $-a + 4b = 0$, alors $a = 4b$. En substituant ce résultat dans $4a - 5b = 1$, on obtient $4(4b) - 5b = 1$, ce qui implique que $11b = 1$. Donc, $b = \frac{1}{11}$ et $a = \frac{4}{11}$. Ainsi, la réponse est $\frac{4}{11} + \frac{1}{11}\sqrt{5}$.

Remarque. On peut arriver à la réponse plus rapidement de la façon suivante : Nous voulons nous débarasser du dénominateur de $\frac{1}{4-\sqrt{5}}$. Pour ce faire, nous calculons simplement $\frac{1}{4-\sqrt{5}} \cdot \frac{4+\sqrt{5}}{4+\sqrt{5}} = \frac{4+\sqrt{5}}{4^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{4+\sqrt{5}}{16-5} = \frac{4+\sqrt{5}}{11}$. L'expression $4 + \sqrt{5}$ est appellé le conjugué de $4 - \sqrt{5}$.

Chapitre 2

Nombres complexes

Ce chapitre introduit les nombres complexes, ainsi que l'arithmétique sur les nombres complexes. Les nombres complexes sont utilisés dans plusieurs domaines en ingénierie et physique, telles que la compression d'image, la compression audio, le traitement de signal, et mécanique quantique. Grâce à eux, de nombreuses possibilités s'ouvrent en mathématiques. La maîtrise du matériel de ce chapitre permet de :

- Définir les nombres complexes.
- Décrire les deux formes pouvant spécifier les nombres complexes et faire la conversion entre les deux formes.
- Faire de l'arithmétique avec les nombres complexes.
- Calculer les puissance à l'aide de la formule de Moivre.
- Calculer les racines n-ièmes d'un nombre complexe.

La compétence en trigonométrie est nécessaire pour ce chapitre.

2.1 Partie réelle et partie imaginaire

Le nombre i est défini comme étant tel que $i^2 = -1$. On l'appelle **nombre imaginaire** car, contrairement aux entiers naturels et aux nombres réels, il n'a pas d'interprétation concrète. Notons que certaines ressources utilisent j plutôt que i. Faites attention!

Même si i est imaginaire, on l'utilise dans plusieurs applications en ingénierie.

Nous pouvons ajouter i aux nombres réels en utilisant l'addition et la multiplication pour former l'ensemble des **nombres complexes**, que l'on dénote par $\mathbb{C}$, avec la propriété supplémentaire que $i \cdot i = -1$ et $0 \cdot i = 0$.

Lorsqu'un nombre complexe est écrit sous la forme $a + bi$, où $a, b \in \mathbb{R}$, on appelle a **la**

partie réelle et b **la partie imaginaire**. (Notons que i n'est pas inclus dans la partie imaginaire.) Nous utilisons aussi la notation suivante pour extraire les parties réels et imaginaires :

Pour $z = a + bi$, $\mathfrak{Re}(z) = a$ et $\mathfrak{Im}(z) = b$.

Par convention, si $b = 1$, on écrit simplement $a + i$ plutôt que $a + 1i$. Si $a = 0$, on écrit simplement bi plutôt que $0 + bi$. Bien entendu, lorsque $a = 0$ et $b = 1$, nous retrouvons le nombre imaginaire i.

Exemple 2.1. Considérons les nombres complexes $z = 3 - 4i$, $w = 2i$, et $u = -5$.

Alors, $\mathfrak{Re}(z) = 3$, $\mathfrak{Im}(z) = -4$, $\mathfrak{Re}(w) = 0$, $\mathfrak{Im}(w) = 2$, $\mathfrak{Re}(u) = -5$ et $\mathfrak{Im}(u) = 0$.

Exercices

1. Déterminez la partie réelle et la partie imaginaire de chacun des nombres complexes suivants :

   a. $1 + 3i$

   b. $2i$

   c. $-\pi - 4i$

   d. 2

Solutions

1. a. La partie réelle est 1 et la partie imaginaire est 3.
   b. La partie réelle est 0 et la partie imaginaire est 2.
   c. La partie réelle est π et la partie imaginaire est -4.
   d. La partie réelle est 2 et la partie imaginaire est 0.

2.2 Arithmétique

L'addition et la multiplication des nombres complexes suivent les règles normales de l'arithmétique pour autant qu'on les traite comme des polynômes en i, et sachant que i^2 peut toujours être réduire à -1.

Dans ce qui suit, $z = a + bi$ et $w = c + di$ sont des nombres complexes où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

2.2.1 Addition et multiplication

L'addition de nombres complexes est donnée par

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

La multiplication se calcule de la manière suivante :

$$\begin{aligned} zw &= (a + bi)(c + di) \\ &= a(c + di) + bi(c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + adi + bci - bd \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

Exemple 2.2. L'addition est illustré dans les exemples suivants :

1. $(1 + 2i) + (-2 + i) = -1 + 3i$
2. $i + (3 + i) = 3 + 2i$

Exemple 2.3.

$$\begin{aligned} (1 + 2i)(-2 + i) &= 1(-2 + i) + 2i(-2 + i) \\ &= -2 + i + (-4)i - 2 \\ &= (-4) + (-3)i. \end{aligned}$$

Par soucis de simplicité, nous écrivons simplement $-4 - 3i$.

2.2.2 Soustraction et division

Maintenant que l'addition et la multiplication des nombres complexes ont été définis, il est possible de montrer que les nombres complexes forment un corps. Plusieurs des propriétés sont faciles à démontrer. Nous montrons ici ce que sont les opposés et les inverses des

nombres complexes. Cette analyse nous permettra de déduire la soustraction et la division des nombres complexes.

Dans ce qui suit, $z = a + bi$ et $w = c + di$ sont des nombres complexes où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

L'opposé de z, dénoté par $-z$, est $(-a)+(-b)i$, ou plus simplement, $-a-bi$. Par exemple, $-(1 + 2i) = -1 - 2i$. Évidemment, $z + (-z) = 0$ puisque

$$\begin{aligned}(a + bi) + (-a - bi) &= (a - a) + (b - b)i \\ &= 0 + 0i = 0.\end{aligned}$$

La soustraction est ensuite définie de la façon suivante :

$$z - w = z + (-w).$$

Par exemple,

$$\begin{aligned}(2 + i) - (1 + i) &= (2 + i) + ((-1) + (-1)i) \\ &= 1\end{aligned}$$

puisque l'opposé de $1 + i$ est $(-1) + (-1)i$. Une fois la définition de la soustraction bien comprise, nous pouvons plus simplement écrire :

$$(2 + i) - (1 + i) = 2 + i - 1 - i = 1.$$

Supposons que $z \neq 0$. Existe-t-il un inverse de z? Si oui, quel est-il?

Notons que $z \neq 0$ implique que l'on ne peut avoir a et b tous deux égaux à 0. Vérifions s'il est possible de trouver des nombres réels c et d tels que $zw = 1$ ou, de façon équivalente,

$$(ac - bd) + (ad + bc)i = 1.$$

Puisque le côté droit de l'égalité est un nombre réel, la partie imaginaire du côté gauche doit être nulle :

$$ad + bc = 0.$$

Ceci donne alors

$$ac - bd = 1.$$

Notons que $c = \frac{a}{a^2+b^2}$ et $d = -\frac{b}{a^2+b^2}$ satisfont aux deux équations ci-dessus. (Obtenues en résolvant pour c et d en terme de a et b. Les détails sont laissés en exercice.)

En effet,

$$\begin{aligned}ad + bc &= a \cdot \left(-\frac{b}{a^2 + b^2}\right) + b \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} \\ &= -\frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{ab}{a^2 + b^2} = 0\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} ac - bd &= a \cdot \frac{a}{a^2+b^2} + -b \cdot \left(-\frac{a}{a^2+b^2}\right) \\ &= \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} \\ &= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1. \end{aligned}$$

Puisque a,b ne sont pas tous deux égaux à 0, $a^2+b^2 \neq 0$ et donc c et d sont des nombres réels bien définis. Donc, l'inverse de z est

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i.$$

La division de z par w, dénotée par $\dfrac{z}{w}$ ou z/w, est obtenue en multipliant z par l'inverse de w, c'est-à-dire

$$\frac{z}{w} = zw^{-1}.$$

Exemple 2.4. Notons que $i(-i) = -i^2 = -(-1) = 1$. Donc, $i^{-1} = -i$.

Exemple 2.5. Quel est l'inverse de $1-2i$? En utilisant la formule précédente avec $a = 1$ et $b = -2$, on obtient

$$\begin{aligned} (1-2i)^{-1} &= \frac{1}{1^2+(-2)^2} - \frac{-2}{1^2+(-2)^2}i \\ &= \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i. \end{aligned}$$

On peut vérifier que $(1-2i)\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right) = 1$.

Exemple 2.6. Quel est $\dfrac{i}{1+i}$?

Trouvons d'abord l'inverse de $1+i$. En utilisant la formule pour l'inverse, on obtient $(1+i)^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$. Donc,

$$\begin{aligned} \frac{i}{1+i} &= i(1+i)^{-1} \\ &= i\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) \\ &= \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}i^2 \\ &= \frac{1}{2}i + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

Exercices

1. Soient $z = 2i$ et $w = -2 + i$. Évaluez les expressions suivantes, et exprimez vos réponses sous la forme $a + bi$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

   a. $z + iw$

   b. zw

   c. z^3

2. Soient $z = 1 - 2i$ et $w = -2 + i$. Évaluez les expressions suivantes, et exprimez vos réponses sous la forme $a + bi$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

   a. $z - w$

   b. $\dfrac{z}{w}$

Solutions

1. a. -1
   b. $-2-4i$
   c. $-8i$
2. a. $3-3i$
   b. $-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$

2.3 Module et conjugué d'un nombre complexe

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe où $a, b \in \mathbb{R}$. Le **conjugué** de z, que l'on dénote par $\overline{z}$, est le nombre complexe $a - bi$. On obtient le conjugué de z tout simplement en changeant le signe de la partie imaginaire. Par exemple,

1. $\overline{4} = 4$ car la partie imaginaire de 4 est 0.
2. $\overline{1 + 2i} = 1 - 2i$.
3. $\overline{3i} = -3i$.

Le **module** de z, que l'on écrit $|z|$, est le nombre réel donné par $\sqrt{a^2 + b^2}$. Notons que cette quantité peut aussi s'écrire comme $\sqrt{z\,\overline{z}}$. Par exemple,

1. Si $z = 1 + 2i$, alors $|z| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.
2. Si $z = 3 - 4i$, alors $|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.
3. Si $z = 2i$, alors $|z| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$.
4. Si $z = 3$, alors $|z| = \sqrt{3^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$.

La mémorisation de la formule pour trouver un inverse n'est pas nécessaire si on utilise la notion du conjugué d'un nombre complexe. Par exemple, pour exprimer $\dfrac{1}{1+i}$ sous la forme $p+qi$, où $p, q \in \mathbb{R}$, on multiplie et le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur, comme ceci :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+i} &= \frac{1}{1+i}\frac{\overline{1+i}}{\overline{1+i}} \\
&= \frac{1}{1+i}\frac{1-i}{1-i} \\
&= \frac{(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\
&= \frac{1-i}{1-i^2} \\
&= \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i
\end{aligned}$$

On peut aussi simplifier le calcul de la division de z par w en utilisant le même truc : $\dfrac{z}{w} = \dfrac{z}{w}\dfrac{\overline{w}}{\overline{w}}$. Par exemple,

$$\frac{3+2i}{2-i} = \frac{3+2i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{4+7i}{2^2 - i^2} = \frac{4+7i}{4+1} = \frac{4}{5} + \frac{7}{5}i.$$

La notion de module d'un nombre complexe généralise la notion de valeur absolue d'un nombre réel; si z est un nombre réel, le module de z est simplement la valeur absolue de z. Par exemple, le module de -2 est 2.

2.3.1 Propriétés du module

Il peut être utile de se souvient des propriétés suivantes. Soient $z, w \in \mathbb{C}$. Alors,

1. $|\overline{z}| = |z|$.
2. $|-z| = |z|$.
3. Si $|z| = 0$, alors $z = 0$.
4. $|zw| = |z|\,|w|$.
5. $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$.
6. $|z + w| \leq |z| + |w|$. (Cette relation est aussi connue sous le nom **l'inégalité triangulaire**.)

Exercices

1. Déterminez le conjugué des nombres complexes suivants :
   a. $2i$
   b. $-2 + \dfrac{3}{5}i$
   c. π
2. Soient z et w des nombres complexes. Montrez que
   a. $\overline{\overline{z}} = z$.
   b. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
   c. $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$.
   d. $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$.
3. Soient $z = 2i$ et $w = -2 + i$. Évaluer les expressions suivantes.
   a. $|\overline{z}|$
   b. $|zw|$
   c. $|z^4|$
   d. $|\frac{1}{z}|$

Solutions

1. a. $-2i$
   b. $-2-\frac{3}{5}$
   c. π
2. Supposons que $z=a+bi$ et $w=c+di$, où $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.
   a. $\overline{\overline{z}}=\overline{\overline{a+bi}}=\overline{a+(-b)i}=a+(-(-b))i=a+bi=z$.
   b. Notons que
   $$\begin{aligned}\overline{z+w}&=\overline{a+bi+c+di}\\&=\overline{(a+c)+(b+d)i}\\&=(a+c)+(-(b+d))i\\&=(a+c)+((-b)+(-d))i\\&=a+(-b)i+c+(-d)i\\&=\overline{z}+\overline{w}.\end{aligned}$$
   c. Notons que
   $$\begin{aligned}\overline{zw}&=\overline{(a+bi)(c+di)}\\&=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}\\&=(ac-bd)-(ad+bc)i\end{aligned}$$
   et
   $$\begin{aligned}\overline{z}\,\overline{w}&=(a-bi)(c-di)\\&=(ac-bd)-(ad+bc)i.\end{aligned}$$
   d. Notons que
   $$\begin{aligned}\overline{z^{-1}}&=\overline{\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i}\\&=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{b}{a^2+b^2}i\end{aligned}$$
   et
   $$\begin{aligned}(\overline{z})^{-1}&=(a+(-b)i)^{-1}\\&=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{b}{a^2+b^2}i.\end{aligned}$$
3. a. 2
   b. $2\sqrt{5}$
   c. 16
   d. $\frac{1}{2}$

2.4 Forme polaire

On dit d'un nombre complexe z écrit sous la forme $a + bi$, où $a, b \in \mathbb{R}$, qu'il est sous sa **forme rectangulaire**. S'il est écrit sous la forme $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ (souvent abrégé par $r\,\mathrm{cis}\,(\theta)$), où $r = |z|$, on dit qu'il est sous sa **forme polaire**. La valeur de θ est appelé **l'argument** et est dénoté par $\arg(z)$.

Notons que $r(\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi))$ représente le même nombre complexe pour chaque entier relatif k. Pour garantie l'unicité, il est d'usage de choisir $0 \leq \theta < 2\pi$. (Certaines références utilisent plutôt $-\pi \leq \theta < \pi$.) Par exemple, la forme polaire de $z = -2 + i$ est $\sqrt{5}\,\mathrm{cis}\,(2{,}6779\ldots)$.

En pratique, la conversion de la forme rectangulaire à la forme polaire est souvent faite de façon approximative (même si la précision de l'approximation peut être choisie de manière arbitraire) à moins que les arguments soient des angles dont le sinus et le cosinus peuvent être calculés exactement; comme $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, etc.

2.4.1 De la forme rectangulaire à la forme polaire

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe. Sa forme polaire est $r\,\mathrm{cis}\,(\theta)$, où $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $0 \leq \theta < 2\pi$.

Considérons d'abord quelques cas spéciaux. Si $z = 0$, alors $r = 0$. Donc, θ peut prendre n'importe quelle valeur. Cependant, nous adoptons la convention que $\theta = 0$ dans un tel cas, à moins qu'il en soit indiqué autrement.

Supposons maintenant que $a = 0$. Dans ce cas, le module de z est $r = |b|$ et

$$\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } b > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{autrement.} \end{cases}$$

Supposons finalement que $a \neq 0$. Soit $\alpha = \tan^{-1}\dfrac{|b|}{|a|}$. Le tableau suivant indique la valeur de l'argument θ en fonction des signes de a et b :

Cas	θ
$a > 0,\ b \geq 0$	α
$a < 0,\ b \geq 0$	$\pi - \alpha$
$a < 0,\ b < 0$	$\pi + \alpha$
$a > 0,\ b < 0$	$2\pi - \alpha$

Exemple 2.7. Afin de convertir $13+4i$ sous sa forme polaire, notons que sa partie réelle et sa partie imaginaire sont toutes deux positives. Donc, sa forme polaire est $r\operatorname{cis}(\theta)$, où $r=\sqrt{13^2+4^2}=\sqrt{285}$ et $\theta=\tan^{-1}\frac{4}{13}$.

Exemple 2.8. Afin de convertir $-1-17i$ sous sa forme polaire, notons que sa partie réelle et sa partie imaginaire sont toutes deux négatives. Donc, sa forme polaire est $r\operatorname{cis}(\theta)$, où $r=\sqrt{(-1)^2+(-17)^2}=\sqrt{290}$ et $\theta=\pi+\tan^{-1}\frac{|-17|}{|-1|}=\pi+\tan^{-1}17$.

2.4.2 De la forme polaire à la forme rectangulaire

Soit $z=r\operatorname{cis}(\theta)$ un nombre complexe, où $r\geq 0$ et $0\leq\theta<2\pi$.

Afin de convertir z sous sa forme rectangulaire, rappelons tout d'abord que $\operatorname{cis}(\theta)$ est une abréviation pour $\cos\theta+i\sin\theta$. Donc,

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=(r\cos\theta)+(r\sin\theta)i.$$

Nous avons donc $\mathfrak{Re}(z)=r\cos\theta$ et $\mathfrak{Im}(z)=r\sin\theta$.

Exemple 2.9. La forme rectangulaire de $3\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ est $3\cos\frac{3\pi}{2}+3\sin\frac{3\pi}{2}i=0+(-3)i=-3i$.

Exemple 2.10. La forme rectangulaire de $\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{3}{7}\right)$ est $\sqrt{2}\cos\frac{3}{7}+\sqrt{2}\sin\frac{3}{7}i\approx 1{,}2863+0{,}5877i$.

2.4.3 Multiplication et division sous forme polaire

La multiplication et la division de nombres complexes sont grandement simplifiés par l'utilisation de la forme polaire.

Soient $z=r_1\operatorname{cis}(\theta_1)$ et $w=r_2\operatorname{cis}(\theta_2)$ des nombres complexes sous forme polaire. Alors

$$zw=r_1r_2\operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2),$$

et si $r_2\neq 0$,

$$\frac{z}{w}=\frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\theta_1-\theta_2).$$

Le premier résultat peut se démontre en utilisant la formule du cosinus et du sinus d'une somme d'angles. Pour démontrer le second résultat, on réécrit $\frac{z}{w}$ sous la forme $\frac{z\overline{w}}{|w|^2}$. Les détails sont laissés en exercice.

Notons que l'inverse de $r\operatorname{cis}(\theta)$, où $r>0$, est donné par

$$\frac{1}{r}\operatorname{cis}(-\theta)=\frac{1}{r}\cos\theta-\frac{1}{r}\sin\theta$$

puisque $\cos\theta=\cos(-\theta)$ et $\sin(-\theta)=-\sin\theta$.

Exemple 2.11. Soit $z = \operatorname{cis}(\theta)$ pour un certain θ. Notons que

$$z^2 = \operatorname{cis}(\theta + \theta) = \operatorname{cis}(2\theta).$$

Donc, l'argument est doublé mais le module demeure le même. De la même façons, on constate qu

$$z^3 = zz^2 = \operatorname{cis}(\theta + 2\theta) = \operatorname{cis}(3\theta).$$

Qu'en serait-il de z^{1000}?

2.4.4 Formule de Moivre

Théorème 2.1 (Formule de Moivre)**.** *Soient k un entier relatif et z un nombre complexe donné sous forme polaire : $r \operatorname{cis}(\theta)$. Alors*

$$z^k = r^k \operatorname{cis}(k\theta).$$

La formule de Moivre simplifie le calcul des puissances d'un nombre complexe *en autant* que l'on connaisse sa forme polaire. Par exemple, qu'est-ce que z^{10} si $z = 1 + i$?

Il n'y a rien de mal à calculer directement z^{10}, mais on peut simplifier la tâche en utilisant la formule de Moivre. Premièrement, nous devons d'abord convertir z sous sa forme polaire. Notons que $r = |z| = \sqrt{2}$ et $\arg(z) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$. Donc, $z = \sqrt{2}\operatorname{cis}(\frac{\pi}{4})$. Alors,

$$\begin{aligned} z^{10} &= \sqrt{2}^{10} \operatorname{cis}\left(10 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 32 \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{2}\right) \\ &= 32 \operatorname{cis}\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 32 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 32i. \end{aligned}$$

Dans l'exemple précédent, nous avons utilisé les identités $\cos(2k\pi + \theta) = \cos\theta$ et $\sin(2k\pi + \theta) = \sin\theta$ pour tout entier relatif k.

En général, si l'argument se retrouve à l'extérieur de l'intervalle $[0, 2\pi)$, il est commun de réduire la valeur à une valeur à l'intérieur de cet intervalle, comme nous l'avons fait ci-dessus.

Exemple 2.12. Soient $z = 4 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $w = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{z}{w} &= \frac{4}{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{3}\right) \\ &= 2 \operatorname{cis}\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \\ &= 2 \operatorname{cis}\left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi\right) \\ &= 2 \operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right).\end{aligned}$$

Exercices

1. Convertissez chacun des nombres suivants sous forme rectangulaire, où les parties réelles et imaginaires sont arrondies à quatre décimales après la virgule.
   a. $\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$
   b. $\sqrt{3} \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$
   c. $2{,}5 \operatorname{cis}\left(\frac{13}{5}\right)$
2. Convertissez chacun des nombres suivants sous forme polaire. Donnez la valeur exacte de l'argument lorsque possible de la faire. Sinon, arrondissez les parties réels et imaginaires à quatre décimales après la virgule.
   a. 3
   b. $3 + 4i$
   c. $3 - 4i$
   d. $-2 + \sqrt{3}i$
   e. $2i$
3. Calculez $(\sqrt{3} - i)^{12}$.
4. Calculez $(-1 + i)^8$.
5. Soient $z = r_1 \operatorname{cis}(\theta_1)$ et $w = r_2 \operatorname{cis}(\theta_2)$ deux nombres complexes sous forme polaire. Démontrez que
   $$zw = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2),$$
   et si $r_2 \neq 0$, que
   $$\frac{z}{w} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2).$$

Solutions

1. a. $-i$
   b. $-1{,}5 + 0{,}8660i$
   c. $-2{,}1422 + 1{,}2888i$
2. a. $3 \operatorname{cis}(0)$
   b. $5 \operatorname{cis}\left(\arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right) \approx 5 \operatorname{cis}(0{,}9273)$
   c. $5 \operatorname{cis}\left(2\pi - \arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right) \approx 5 \operatorname{cis}(5{,}3559)$
   d. $\sqrt{7} \operatorname{cis}\left(\pi - \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \approx 2{,}6458 \operatorname{cis}(2{,}4279)$
   e. $2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$
3. 4096
4. 16
5. Le résultat est une conséquence des identités suivantes :

$$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$$

et

$$\begin{aligned}
\cos(\theta+\gamma) &= \cos\theta\cos\gamma - \sin\theta\sin\gamma \\
\cos(\theta-\gamma) &= \cos\theta\cos\gamma + \sin\theta\sin\gamma \\
\sin(\theta+\gamma) &= \sin\theta\cos\gamma + \cos\theta\sin\gamma \\
\sin(\theta-\gamma) &= \sin\theta\cos\gamma - \cos\theta\sin\gamma.
\end{aligned}$$

2.5 Racine n-ième

2.5.1 Racine de l'unité

Soit n un entier positif. Considérons l'équation

$$z^n = 1.$$

Quelles sont les solutions de cette équation?

On peut réécrite cette équation sous la forme

$$z^n - 1 = 0.$$

Selon le théorème fondamental de l'algèbre, on peut factoriser $z^n - 1$ comme

$$(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n),$$

où $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Les nombres complexes $z_1, \ldots, z_n$ sont tous des solutions de $z^n = 1$. Que sont les nombres complexes $z_1, \ldots, z_n$?

Soit $\omega = \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. Pour chaque $k \in \{1, \ldots, n\}$, on prend $u_k = \omega^k$. Notons que $u_1, \ldots, u_n$ sont tous distincts. D'après le théorème 2.1,

$$\begin{aligned} u_i^n &= (\omega^i)^n \\ &= \left(\operatorname{cis}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)^n \\ &= \operatorname{cis}\left(n\frac{2k\pi}{n}\right) \\ &= \operatorname{cis}(2k\pi) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc, u_k est une solution de $z^n = 1$ pour chaque $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Les nombres complexes $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ sont les **racines n-ièmes de l'unité.**

2.5.2 Obtention des racines n-ièmes

Soit $u \neq 0$ un nombre complexe ayant comme forme polaire $r \operatorname{cis}(\theta)$. Supposons que l'on désire trouver toutes les solutions de $z^n = u$. Chaque solution est appelé une **racine n-ième** de u. (Lorsque $n = 2$, nous avons les **racines carrés**. Lorsque $n = 3$, nous avons les **racines cubiques**.)

Écrivons $z = \tilde{z} r^{\frac{1}{n}} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta}{n}\right)$. Alors $z^n = u$ devient

$$\left(\tilde{z} r^{\frac{1}{n}} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta}{n}\right)\right)^n = u,$$

ou

$$\tilde{z}^n u = u.$$

Puisque $u \neq 0$, nous avons

$$\tilde{z}^n = 1.$$

Comme nous l'avons vu plus tôt, les solutions de $\tilde{z}^n = 1$ sont $1, \omega, \omega^1, \ldots, \omega^{n-1}$, où $\omega = \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. Ainsi, les solutions de $z^n = u$ sont

$$r^{\frac{1}{n}} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta}{n}\right),\ r^{\frac{1}{n}} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta}{n}\right)\omega,\ r^{\frac{1}{n}} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta}{n}\right)\omega^2, \ldots, r^{\frac{1}{n}} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta}{n}\right)\omega^{n-1}.$$

On peut aussi écrire cette liste sous la forme $r^{\frac{1}{n}} \operatorname{cis}\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$, $k = 0, \ldots, n-1$. Ce sont toutes les racines n-ièmes de $r \operatorname{cis}(\theta)$.

Exemple 2.13. Obtenons toutes les racines cubiques de -8. La forme polaire de -8 est $8 \operatorname{cis}(\pi)$. Ainsi, en applicant la liste générique donnée ci-dessus avec $\theta = \pi$ et $n = 3$, nous obtenons

$$2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right),\ 2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi + 2\pi}{3}\right),\ 2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi + 4\pi}{3}\right).$$

Une simplification donne

$$2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right),\ 2 \operatorname{cis}(\pi),\ 2 \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right).$$

La conversion sous forme rectangulaire donne

$$1 + \sqrt{3}i,\ -2,\ 1 - \sqrt{3}i.$$

Exercices

1. Déterminez toutes les racines carrés de $17 - 14i$. Exprimez vos réponses sous forme rectangulaire, où les parties réelles et imaginaires sont arrondies à quatre décimales après la virgule.
2. Déterminez toutes les racines quatrièmes de -1. Exprimez vos réponses sous forme rectangulaire, où les parties réelles et imaginaires sont arrondies à quatre décimales après la virgule.

Solutions

1. $-4{,}4172 + 1{,}5847i$ et $4{,}4172 - 1{,}5847i$.
2. $0{,}7071 + 0{,}7071i$, $-0{,}7071 + 0{,}7071i$, $-0{,}7071 - 0{,}7071i$, $0{,}7071 - 0{,}7071i$.

2.6 Formule d'Euler

L'identité d'Euler est une identité remarquable :

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Cette identité est un cas spécial d'un résultat plus général :
Théorème 2.2 (Formule d'Euler)**.** *Pour chaque* $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Notons que l'identité d'Euler s'obtient en substituant $x = \pi$.

La formule d'Euler fût établie par le mathématicien suisse Leonhard Euler en utilisant l'expansion en série de puissance de e^z, $\cos z$ et $\sin z$:

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} + \cdots \\ \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots \end{aligned}$$

En utilisant l'analyse complexe, un sujet qui ne fait pas partie du présent ouvrage, il est possible de montrer que ces séries convergent absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$. La formule d'Euler suit en prenant $z = ix$.

La formule d'Euler nous permet de représenter un nombre complexe sous forme exponentielle $re^{i\theta}$ puisque $re^{i\theta} = r\,\mathrm{cis}\,(\theta)$. La forme exponentielle facilite la mémorisation de la formule de Moivre puisque qu'elle correspond à la loi des exposants :

$$(re^{i\theta})^n = r^n(\mathrm{cis}\,(\theta))^n = r^n\,\mathrm{cis}\,(n\theta) = r^n e^{in\theta}.$$

Exercices

1. Lequel des nombres suivants est $(e^i)^2$?
   a. e^2
   b. e^{-1}
   c. e^{2i}
2. Complétez les détails de la preuve de la formule d'Euler en supposant la convergence absolue des séries.

Solutions

1. La réponse est e^{2i}.
2. Notons que

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \frac{(iz)^6}{6!} + \frac{(iz)^7}{7!} + \cdots \\ &= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} - i\frac{z^7}{7!} \cdots \\ &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right) \\ &= \cos z + i \sin z. \end{aligned}$$

2.7 Exemple de test portant sur la matière de ce chapitre

1. Soit $z = 2 - 3i$. Déterminez $\overline{z}$, $|z|$ et z^{-1}.
2. Soient $z = 1 - 2i$ et $w = 1 - i$. Simplifiez l'expression $z + 4w^{-2}$ le plus possible.
3. Convertissez chacun des nombres complexes suivants sous forme polaire. (Donnez le module et l'argument arrondis à cinq décimales après la virgule.)
   a. $2 - 7i$
   b. $-5 - 3i$
4. Convertissez $3\,\mathrm{cis}\,(\frac{3}{5})$ sous forme rectangulaire où les parties réelles et imaginaires sont arrondies à quatre décimales après la virgule.
5. Déterminez les racines quatrièmes de $4 + 3i$ sous forme rectangulaire où les parties réelles et imaginaires sont arrondies à quatre décimales après la virgule.
6. Une des racines cubiques de $8-5i$, où les parties réelles et imaginaires sont arrondies à 5 décimales après la virgule est $-0{,}69947 + bi$. Quelle valeur prend b?
7. Est-ce que l'équation $(z - i)^2 + 1 = 0$ a une solution réelle?
8. Soient $u = i$ et $w = -2 - i$. Déterminez tous les nombres réels a tels que $|a + u| = |w|$.
9. Déterminez tous les nombres complexes z satisfaisant à $iz^2 - 2z + 1 = 0$.

Solutions

1. Pour l'inverse de z, on obtient $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{\overline{z}}{\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{2+3i}{13} = \dfrac{2}{13}+\dfrac{3}{13}i.$

2. Notons que

$$\begin{aligned} z + 4w^{-2} &= z + \frac{4}{w^2} \\ &= 1 - 2i + \frac{4}{(1-i)^2} \\ &= 1 - 2i + \frac{4}{-2i} \\ &= 1 - 2i + \frac{2}{-i} \\ &= 1 - 2i + \frac{2}{-i}\cdot\frac{i}{i} \\ &= 1 - 2i + \frac{2i}{-i^2} \\ &= 1 - 2i + \frac{2i}{-(-1)} \\ &= 1 - 2i + \frac{2i}{1} \\ &= 1 - 2i + 2i \\ &= 1 \end{aligned}$$

3. a. Le module est $r = \sqrt{2^2 + (-7)^2} = \sqrt{53}$. L'argument θ est donné par $2\pi - \alpha = 2\pi - \arctan\left(\frac{7}{2}\right)$ radians. Donc, $2 - 7i = r\ \mathrm{cis}\,(\theta)$, où $r \approx 7{,}28011$ et $\theta \approx 4{,}99069$.

   b. Le module est $r = \sqrt{(-6)^2 + 1^2} = \sqrt{37}$. L'arument θ est donné par $\pi - \arctan\left(\frac{1}{6}\right)$ radians.

   Donc, $-6 + i = r\ \mathrm{cis}\,(\theta)$, où $r \approx 6{,}08276$ et $\theta \approx 2{,}97644$.

4. Rappelons que $3\ \mathrm{cis}\left(\frac{3}{5}\right)$ est une façon abrégé d'écrire $3\left(\cos\frac{3}{5} + i\sin\frac{3}{5}\right)$. Donc, la partie réelle est $3\cos\frac{3}{5} \approx 2{,}476006844729$ et la partie imaginaire est $3\sin\frac{3}{5} \approx 1{,}693927420185$.

   Donc, la forme rectangulaire de $3\ \mathrm{cis}\left(\frac{3}{5}\right)$ est $2{,}4760 + 1{,}6939i$, où les parties réelles et imaginaires sont arrondies à quatre décimales après la virgule.

5. Rappelons que les racines quatrièmes d'un nombre complexe en forme polaire $r\ \mathrm{cis}\,(\theta)$ sont données par $r^{\frac{1}{4}}\ \mathrm{cis}\left(\frac{2j\pi}{4} + \frac{\theta}{4}\right)$ pour $j = 0, 1, 2, 3$. Convertissons d'abord $4 + 3i$ sous forme polaire.

   Le module r est donné par $\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$.

Pour l'argument, on obtient $\theta = \arctan \frac{3}{4}$.

Donc, les quatres racines quatrièmes sont $5^{\frac{1}{4}} \operatorname{cis}\left(\frac{\arctan \frac{3}{4}}{4}\right)$, $5^{\frac{1}{4}} \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{4} + \frac{\arctan \frac{3}{4}}{4}\right)$, $5^{\frac{1}{4}} \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{4} + \frac{\arctan \frac{3}{4}}{4}\right)$, $5^{\frac{1}{4}} \operatorname{cis}\left(\frac{6\pi}{4} + \frac{\arctan \frac{3}{4}}{4}\right)$.

En simplifiant à l'aide d'une calculatrice, nous obtenons les quatres racines quatrièmes suivantes, où les parties réelles et imaginaires sont arrondies à quatre décimales après la virgule : $1{,}4760 + 0{,}2395i$, $-0{,}2395 + 1{,}4760i$, $-1{,}4760 - 0{,}2395i$, $0{,}2395 - 1{,}4760i$.

6. Soit $z = 8 - 5i$. Notons que z a trois racines cubiques mais la question s'intéresse seulement à une racine particulière ayant la partie réelle donnée (arrondies à cinq décimales). Une stratégie est de commencer par trouver toutes les racines cubiques de z et de consulter la liste afin de trouver celle qui nous est donnée.

   Convertissons d'abord z sous forme polaire. Le module r est donné par $\sqrt{8^2 + (-5)^2} = \sqrt{64 + 25} = \sqrt{89} \approx 9{,}433981132$. (Nous utilisons quelques décimales de plus pour avoir une précision de 5 décimales pour notre réponse finale.)

   Pour l'argument, on obtient $\theta = 2\pi - \arctan \frac{5}{8} = 5{,}72458599$.

   Les racines cubiques de z sont alors approchées par $9{,}433981132^{\frac{1}{3}} \operatorname{cis}\left(\frac{5{,}72458599}{3}\right)$, $9{,}433981132^{\frac{1}{3}} \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{5{,}72458599}{3}\right)$, et $9{,}433981132^{\frac{1}{3}} \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{5{,}72458599}{3}\right)$.

   La conversion de la première racine sous forme rectangulaire donne $-0{,}69947 + 1{,}99386i$. Puisque la partie réelle de cette racine cubique correspond à celle donnée dans la question, nous n'avons pas besoin de convertir les autres racines sous forme rectangulaire, et $b = 1{,}99386$.

7. La réponse est « oui ». Pour le voir, on réécrit l'équation $(z - i)^2 = -1$. Puisque -1 a deux racines carrées, i et $-i$, on doit avoir $z - i = i$ ou $z - i = -i$, ce qui implique que $z = 2i$ ou $z = 0$, cette dernière étant une solution réelle.

8. Rappelons que pour un nombre complexe $z = x + yi$, où x, y sont des nombres réels, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Alors, $|w| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ et $|a + u| = |a + i| = \sqrt{a^2 + 1^2}$, puisque a est un nombre réel. Ainsi, nous devons trouver a satisfaisant à $\sqrt{a^2 + 1} = \sqrt{5}$. En mettant les deux côtés au carré, on obtient $a^2 + 1 = 5$. Donc, $a = \pm 2$.

9. Nous allons résoudre ce problème en utilisant la méthode de complétion du carré. La clef est la transformation de l'équation $z^2 + pz + q = 0$ sous la forme $(z + r)^2 = s$ Les solutions sont $s_1 - r$ et $s_2 - r$, où s_1 et s_2 sont les racines carrées de s. La

transformation recherchée s'obtient comme suit :

$$\begin{aligned} & z^2 + pz + q = 0 \\ \Leftrightarrow\ & z^2 + pz = -q \\ \Leftrightarrow\ & z^2 + pz + (p/2)^2 = -q + (p/2)^2 \\ \Leftrightarrow\ & (z + p/2)^2 = (p/2)^2 - q \end{aligned}$$

D'abord, on multiplie chaque côté par i^{-1} (qui est $-i$) pour obtenir

$$z^2 + 2iz - i = 0.$$

L'équation peut être ensuite réécrite comme

$$z^2 + 2iz = i.$$

Le coefficient de z est $2i$. On ajoute alors $(2i/2)^2$ (qui est i^2) de chaque côté pour obtenir

$$z^2 + 2iz + i^2 = i + i^2.$$

Ainsi, l'équation peut être réécrite sous la forme

$$(z + i)^2 = -1 + i.$$

Ainsi, $z + i$ doit être égale à une des racines carrés de $-1 + i$.
En forme polaire, $-1+i = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,\frac{3\pi}{4}$. Les racines carrés de $-1+i$ sont donc $2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{cis}\,\frac{3\pi}{8}$ et $2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{cis}\,\frac{11\pi}{8}$, qui sont approchées par $0{,}4551 + 1{,}0987i$ et $-0{,}4551 - 1{,}0987i$, respectivement. Les solutions, où les parties réelles et imagines ont une précision de quatre décimales, sont $0{,}4551 + 0{,}0987i$ et $-0{,}4551 - 2{,}0987i$.

Chapitre 3

Résolution de systèmes d'équations linéaires

Ce chapitre porte sur un des sujets principaux de l'algèbre linéaire, c'est-à-dire la résolution d'équations linéaires. La maîtrise du matériel de ce chapitre permet de :

- Définir et identifier un système d'équations linéaires.
- Résoudre un système d'équations linéaires en utilisant la substitution ou l'élimination de Gauss-Jordan.
- Définir et obtenir la forme échelonnée réduite d'une matrice.
- Représenter un système d'équations linéaires de multiples façons.
- Obtenir des informations à propos de la solution à partir de la forme échelonnée réduite d'une matrice.
- Donner une description de l'ensemble-solution d'un système d'équations linéaires.

Les connaissances requises pour ce chapitre incluent les nombres complexes et l'arithmétique sur $GF(2)$.

3.1 Définition

Une **équation linéaire** est une équation de la forme :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b,$$

où $x_1, \ldots, x_n$ sont des **variables** (ou **inconnues**) et $a_1, \ldots, a_n, b$ sont des constantes.

La constante a_i est le **coefficient** de la variable x_i.

Une équation linéaire est normalement définie sur un corps, c'est-à-dire que les constantes sont des éléments d'un corps et les valeurs recherchées pour les variables proviennent du même corps.

Les équations qui ne sont pas linéaires sont des **équations nonlinéaires**.

Exemple 3.1. $x - 2y + 3z = 4$ est une équation linéaire dont les variables sont x, y, z. Ici, le coefficient de x est 1. Une solution (il en existe plusieurs autres) est donnée par $x = 3$, $y = 1$, $z = 1$.

Exemple 3.2. $x_1 - \pi x_2 + 3x_3 - \sqrt{2}x_4 = 0$ est une équation linéaire en x_1, x_2, x_3, x_4 comme variables. Le coefficient de x_2 est π, celui de x_4 est $\sqrt{2}$.

Soient $\mathbb{K}$ un corps et m, n des entiers positifs. Dans ce qui suit, on suppose que $a_{ij} \in \mathbb{K}$ et $b_i \in \mathbb{K}$, pour $i = 1, ..., m$ et $j = 1, ..., n$. Un système d'équations linéaires en variables $x_1, \ldots, x_n$ est défini par :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j &= b_1 \\
\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j &= b_2 \\
&\vdots \\
\sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j &= b_m.
\end{aligned}$$

Une **solution** du système est un choix d'éléments de $\mathbb{K}$ assignées aux $x_1, \ldots, x_n$ tel que pour chaque équation, le côté gauche prend la même valeur que le côté droit. Par **résoudre** le système, on entend trouver une solution ou toutes les solutions du système, selon le contexte.

Dans plusieurs applications, on doit résoudre des systèmes d'équations linéaires de façon rapide. C'est le cas, par exemple, des prévisions météorologiques et de l'optimisation d'un portfolio d'investissement. Il y en a plusieurs autres.

Nous sommes intéressés à trouver des manières de résoudre de tels systèmes et à identifier les structures mathématiques qui émergent de la recherche de solutions.

Exemple 3.3. Considérons le système d'équations linéaires suivant sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 &= 2 \\
-x_1 + 2x_2 &= 3.
\end{aligned}$$

Si $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$, on vérifie que le côté gauche prend la même valeur que le côté droit pour les deux équations. C'est donc une solution du système.

3.1.1 Deux cas spéciaux

Deux cas spéciaux, pour lesquels l'obtention de solutions est assez simple, sont maintenant à l'étude.

Cas 1: Le système n'a qu'une seule variable.

Considérons le système suivant sur $\mathbb{Q}$:

$$2x = 8 \qquad \text{(A)}$$
$$-x = -4 \qquad \text{(B)}$$
$$3x = 2 \qquad \text{(C)}$$

Existe-t-il une valeur de $x \in \mathbb{Q}$ satisfaisant à toutes les équations?

On remarque que (A) est équivalent à $x = 4$, suite à la multiplication par $1/2$ de chaque côté. De plus, (C) est équivalent à $x = 2/3$, suite à la multiplication par $1/3$ de chaque côté. Puisque x ne peut être à la fois égal à 4 et $2/3$, il n'y a pas de solution.

En général, pour la résolution d'un système à une seule variable, chaque équation est mise sous la forme $x = \beta_i$, où β_i est une constante. Si tous les β_i sont égaux, alors $x = \beta_i = \beta$ est la solution unique du système. Sinon, le système n'admet pas de solution.

Cas 2: Le système n'a qu'une seule équation.

Considérons le système suivant sur $\mathbb{Q}$, qui consiste en une seule équation à trois variables:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 5.$$

Nous désirons trouver toutes les valeurs rationnelles que l'on puisse assigner à x_1, x_2 et x_3 de façon à obtenir l'égalité.

On additionne de part et d'autre par $-2x_2 + x_3$ afin d'obtenir

$$x_1 = 5 - 2x_2 + x_3.$$

Observons que peu importe la valeur assignée à x_2 et à x_3, la valeur de x_1 est contrainte à être $5 - 2x_2 + x_3$. Par exemple, si $x_2 = 0$ et $x_3 = 1$, alors $x_1 = 5 - 2(0) + 1 = 6$, d'où $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ est une solution de l'équation.

Puisqu'on est libre de choisir $x_2 = s \in \mathbb{Q}$ et $x_3 = t \in \mathbb{Q}$, on obtient $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - 2s + t \\ s \\ t \end{bmatrix}$.
Comme s et t couvrent tous les nombres rationnels, on obtient toutes les solutions rationnelles de l'équation. Par ce procédé, il y en a une infinité.

Plus généralement, un système d'équations linéaires ayant une seule équation mais au moins deux variables dont les coefficients sont nuls admet une infinité de solutions, à moins que le corps n'ait qu'un nombre fini d'éléments.

Exercices

1. Déterminez toutes les solutions rationnelles des systèmes suivants :

   a.
   $$\begin{aligned} 2x - 1 &= 5 \\ 3x &= 9 \\ 2 - x &= x \end{aligned}$$

   b. $2x - 3y = 4$

2. Est-il possible pour un système à valeurs dans $\mathbb{R}$ n'ayant qu'une seule équation d'admettre exactement deux solutions?

Solutions

1. a. Le système n'admet aucune solution car les deux premières équations impliquent que $x = 3$, mais $x = 3$ ne satisfait pas à la troisième équation.

   b. Les solutions du système sont donnée par $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3t+2 \\ 2t \end{bmatrix}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On peut également les écrire de manière différentes.

2. Non. (Il est difficile de le démontrer à l'aide des connaissances des premiers chapitres. Cependant, la réponse va devenir évidente d'ici la fin du présent chapitre. Notons que si on remplace $\mathbb{R}$ par $GF(2)$, la réponse change puisque l'équation $x_1 + x_2 = 0$ admet exactement deux solutions dans $GF(2)$.)

3.2 Méthode de la substitution

Nous avons étudié la résolution d'un système dans des cas particuliers. Nous étudions maintenant le cas général. L'idée est simple: on cherche à réduire un système général sous une forme qui est plus facile à résoudre, c'est-à-dire un système à une variable ou un système à une équation. Comment s'y prend-on exactement pour accomplir une telle tâche?

Considérons le système suivant sur $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= -2. \end{aligned}$$

La première équation est équivalente à $x_1 = \frac{1}{2}x_2$. Si nous connaissons la valeur de x_2, nous connaissons donc également la valeur de x_1. On peut donc remplacer chaque instance de x_1 par $\frac{1}{2}x_2$.

On effectue cette substitution dans la deuxième et troisième équation afin d'obtenir

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x_2 + x_2 - 2x_3 &= 4 \\ \frac{3}{2}x_2 - 2x_2 + x_3 &= -2, \end{aligned}$$

ce qui, par simplification, donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_2 - 2x_3 &= 4 && \text{(A)} \\ -\frac{1}{2}x_2 + x_3 &= -2 && \text{(B)} \end{aligned}$$

Ces deux équations forment un système contenant seulement 2 variables: x_2 et x_3. L'obtention des solutions de ce système nous donnera les solutions du système original, en utilisant $x_1 = \frac{1}{2}x_2$. Nous avons réduit le problème original à un problème plus simple, un système de deux équations à deux inconnue.

Nous pouvons continuer ainsi, en utilisant (A) pour exprimer x_2 en terme de x_3 et en remplaçant x_2 dans (B). Cependant, nous pouvons également prendre le raccourci suivant: le terme $\frac{1}{2}x_2$ apparaît dans (A) et dans (B). C'est ce dernier que l'on réécrit en terme de x_3. De (A), on obtient $\frac{1}{2}x_2 = 4 + 2x_3$. En combinant avec (B), on obtient $-(4 + 2x_3) + x_3 =$

-2, d'où $-x_3 = 2$. Ainsi, on doit avoir $x_3 = -2$, ce qui implique que $x_2 = 0$, et donc que $x_1 = 0$.

Sans ce raccourci, nous devons premièrement réécrire (A) sous la forme $x_2 = 8 + 4x_3$, pour ensuite substituer x_2 par $8 + 4x_3$ dans (B) afin d'obtenir $-\frac{1}{2}(8 + 4x_3) + x_3 = -2$. La simplification de cette dernière équation donne $x_3 = -2$, comme au préalable.

L'exemple précédent illustre la méthode de la substitution. La recette générale est simple: Supposons que le système ait plus d'une variable et plus d'une équation. On prend une des équations et on la ré-écrit de façon à ce qu'une des variables soit exprimée en terme des autres variables, c'est-à-dire que la variable en question est la seule du côté gauche de l'équation. Appelons le côté droit de cette équation R. Alors, pour chacune des autres équations du système, on remplace chaque apparition de la variable par R. Après simplification, on obtient un système ayant au moins une équation de moins et une variable de moins. Le procédé est répété jusqu'à l'obtention d'un système pouvant aisément être résolu.

Exercices

1. Déterminez toutes les solutions rationnelles de chacun des systèmes suivants :

   a. $$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ 3x - y &= 2 \end{aligned}$$

   b. $$\begin{aligned} 2x + y - z &= 0 \\ -x - y + z &= 1 \end{aligned}$$

2. Est-il possible qu'un système d'équations linéaires ayant plus de variables que d'équations n'admet aucune solution?

Solutions

1. a. $x = 1$, $y = 1$ est la seule solution.

   b. Toutes les solutions sont données par $x = 1$, $y = -2 + z$, z n'importe quel nombre rationnel.

2. Oui. Par exemple,

$$x + y + z = 0$$
$$x + y + z = 1$$

3.3 Opérations élémentaires

Dans la section précédente, nous avons résolu le système suivant par substitution :

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 && \text{(A)} \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 && \text{(B)} \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= -2. && \text{(C)} \end{aligned}$$

Rappelons que l'on utilise (A) afin d'obtenir $x_1 = \frac{1}{2}x_2$. Chaque apparition de x_1 dans (B) et (C) est ensuite remplacée par $\frac{1}{2}x_2$, ce qui nous donne le système suivant :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}x_2 \\ \frac{1}{2}x_2 - 2x_3 &= 4 \\ -\frac{1}{2}x_2 + x_3 &= -2, \end{aligned}$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{1}{2}x_2 &= 0 && \text{(D)} \\ \frac{1}{2}x_2 - 2x_3 &= 4 && \text{(E)} \\ -\frac{1}{2}x_2 + x_3 &= -2. && \text{(F)} \end{aligned}$$

Voyons maintenant comme le même résultat peut être obtenu de façon différente. Notons que l'on peut obtenir (D) en multipliant chaque côté de (A) par le scalaire $\frac{1}{2}$. Nous utilisons la notation (D) $= \frac{1}{2} \times$ (A) pour dénoter cette opération.

On obtient (E) en multipliant de part et d'autre de (A) par $\frac{1}{2}$, et en additionnant le résultat à (B). On utilise la notation (E) = (B) $+ \frac{1}{2} \times$ (A) pour dénoter cette opération.

De la même façon, (F) = (C) $- \frac{3}{2} \times$ (A).

Le système composé par (D), (E) et (F) est équivalent au système original dans le sens où toutes les solutions de ce système sont également une solution du système original, et vice versa. Cela signifie que les opérations effectuées ne créent pas et ne perdent pas de solutions en cours de route. Ces opérations sont en fait réversibles.

Les types d'opérations utilisées dans l'exemple qui précède sont suffisantes pour résoudre tout système d'équations linéaires défini sur un corps. Plus précisément, les **opérations élémentaires** sont:

1. La multiplication de chaque côtés d'une équation par la même constante non nulle.
2. L'addition du produit d'une équation par une constante à une autre équation (on remplace cette dernière par le résultat de l'opération élémentaire)
3. L'échange des positions de deux équations.

La troisième opération n'est pas vraiment nécessaire (on ne la retrouve pas dans l'exemple ci-dessus); cependant, il est utile de l'avoir à la portée de la main lorsque l'on utilise des matrices afin de résoudre un système d'équations linéaires, comme nous le verrons bientôt.

Exercices

1. Utilisez les opérations élémentaires afin de transformer

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 2x + y &= 5 \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} 3x &= 6 \\ x - y &= 1. \end{aligned}$$

2. Utilisez les opérations élémentaires afin de transformer

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ 2x + y - z &= 2 \\ -x + 2y - 2z &= -1 \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ x + 2y - 2z &= 1 \\ y - z &= 0 \end{aligned}$$

Solutions

1. Nous commençons par ajouter la première équation à la deuxième équation, modifiant ainsi cette dernière. Nous échangeons ensuite les positions de deux équations.
2. Nous commençons par ajouter le produit de la première équation par -1 à la deuxième équation, modifiant ainsi cette dernière. On ajoute ensuite la première équation à la troisième, modifiant ainsi cette dernière.

3.4 Représentation matricielle

Considérons le système

$$\begin{aligned} u - 2v + w &= 4 \\ -u - 2w &= 5, \end{aligned}$$

où u, v et w sont les variables du système.

On peut réécrire ce système sous la forme d'un uplet: $\begin{bmatrix} u - 2v + w \\ -u - 2w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, puisque deux uplets sont égaux si et seulement si leurs composantes correspondantes sont égales.)

Nous introduisons maintenant une nouvelle façon d'écrire ce système sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Il y a trois composantes dans la représentation matricielle d'un système d'équations linéaires. La matrice de gauche est la **matrice des coefficients**. La première ligne de la matrice contient les coefficients de la première équation. La deuxième ligne contient les coefficients de la deuxième équation. L'ordre selon lequel les coefficients sont présentés est important. On doit déterminer à l'avance quelle colonne de la matrice représente chaque variable.

La seconde matrice est un uplet formé des variables, énumérées dans l'ordre approprié. Le premier élément du uplet, u dans ce cas, correspond à la première colonne de la matrice des coefficients.

Dans le même ordre d'idée, le deuxième élément, v, correspond à la deuxième colonne de la matrice des coefficients, et le troisième élément, w, correspond à la troisième colonne de la matrice des coefficients.

Finalement, la matrice de droite est un uplet contenant les valeurs à droite de chacune des équations.

Pour indiquer une évaluation du côté gauche pour un choix de valeurs assignées à u, v, w, disons $u = 1$, $v = 2$ et $w = 3$, on écrit $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, qui s'évalue comme suit :

$$\begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Si $\mathbf{A}$ dénote la matrice des coefficients, $\mathbf{x}$ l'uplet des variables, et $\mathbf{b}$ l'uplet des constantes du système, alors le système peut s'écrire de manière compacte sous la forme

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Considérons maintenant la représentation matricielle d'un système d'équations linéaires général. Soient $\mathbb{K}$ un corps et m, n des entiers positifs. Soit $\mathbb{K}^{m\times n}$ l'ensemble des matrices ayant m lignes et n colonnes à éléments dans $\mathbb{K}$. Soient $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$, où $x_1, \ldots, x_n$ sont des variables et $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{K}$.

Le produit $\mathbf{Ax}$ est le m-uplet

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix},$$

où a_{ij} dénote l'élément de la i-ième ligne et la j-ième colonne de $\mathbf{A}$, que l'on appelle l'élément (i, j) de $\mathbf{A}$.

Ainsi, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ représente le système d'équations linéaires donné par

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

un système de m équations à n inconnues.

Exercices

1. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. Quel est l'élément $(2, 1)$ de $\mathbf{A}$?
2. Écrivez chacune des équations matricielles $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ suivantes sous la forme d'un système d'équations linéaires.

a. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix}$.

b. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$.

Solutions

1. 4.
2. a. Le système est

$$x - 2z = 5$$
$$-3y + 4z = -6$$

b. Le système est

$$x_2 = b_1$$
$$x_3 = b_2$$
$$x_1 = b_3$$

3.5 Combinaison linéaire de colonnes

Soit le système donné par $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, où $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$.

D'après ce que nous avons vu à la dernière section, $\mathbf{Ax}$ dénote l'uplet $\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \end{bmatrix}$.

En utilisant l'arithmétique des uplets, on obtient

$$\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

C'est un exemple de ce que l'on nomme une **combinaison linéaire** des uplets $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, et $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$. (En général, une combinaison linéaire d'uplets $\mathbf{t}^{(1)}, \ldots, \mathbf{t}^{(k)}$ prend la forme $a_1\mathbf{t}^{(1)} + a_2\mathbf{t}^{(2)} + \cdots + a_k\mathbf{t}^{(k)}$, où a_i est un scalaire pour chaque $i = 1, \ldots, k$.)

La question de déterminer si $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ admet une solution peut être interprétée comme suit : est-ce que $\mathbf{b}$ est une combinaison linéaire des colonnes de $\mathbf{A}$?

En général, si $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_n]$, où $\mathbf{A}_i$ représente la i-ième colonne de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ est l'uplet des variables, alors

$$\mathbf{Ax} = x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \cdots + x_n\mathbf{A}_n.$$

Résoudre $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ signifie trouver une combinaison linéaire de $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ donnant $\mathbf{b}$. Cette façon de visualiser les systèmes d'équations linéaires nous sera utile lorsque l'on parlera d'espaces vectoriels et d'approximation par les moindres carrés.

Exercices

1. Écrivez chacun des systèmes suivants en tant que combinaison linéaire d'uplets ayant x, y et z comme scalaires.

   a. $\begin{bmatrix} x + 2y - z \\ y + z \\ 2x \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 2z-y+x \\ x-y+z \\ y+2x \end{bmatrix}$

Solutions

1. a. $x\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$

   b. $x\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$

3.6 Matrice augmentée associée à un système

Considérons le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Nous pouvons utiliser une seule matrice afin de capturer toute l'information requise afin de le résoudre; on peut représenter le système sous la forme

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right],$$

en sachant que la première colonne correspond à la variable x_1 et que les éléments sont les coefficients de x_1, que la deuxième colonne correspond à la variable x_2, la troisième colonne à la variable x_3, et que la quatrième colonne correspond au 3-uplet des constantes. (La ligne verticale séparant les 3 premières colonnes de la quatrième colonne n'est présente que pour des raisons esthétiques et est en fait optionnelle.)

La matrice représentant le système dans son entièreté est appelée la **matrice augmentée** associée au système; elle est formée en combinant la matrice des coefficients et l'uplet des constantes du système, comme suit : $[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]$

3.6.1 Opérations élémentaires sur les lignes

Nous avons introduit les opérations élémentaires pour la résolution d'équations linéaires. Si nous décidons d'utiliser la matrice augmentée, les opérations élémentaires deviennent des **opérations élémentaires sur les lignes**:

1. Multiplier une ligne par une constante non nulle.
2. Ajouter un multiple d'une ligne à une autre ligne.
3. Échanger deux lignes.

Exemple 3.4. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

— En multipliant la deuxième ligne par 2, ce que l'on dénote par $L_2 \leftarrow 2L_2$, on obtient la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

— En ajoutant le multiple de la troisième ligne par -1 à la première ligne, ce que l'on dénote par $L_1 \leftarrow L_1 + (-1)L_3$ (ou simplement par $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$), on obtient la matrice $\begin{bmatrix} 1-3 & 0-(-2) & 2-1 & 3-0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, ou encore $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

— En échangeant la première et la troisième ligne, ce que l'on dénote par $L_1 \leftrightarrow L_3$, on obtient la matrice $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

3.6.2 Résolution d'un système en utilisant la matrice augmentée associée

Voyons maintenant comment la résolution d'un système, en utilisant les opérations élémentaires, correspond à une transformation de la matrice augmentée qui utilise les opérations élémentaires sur les lignes.

Au départ, le système et la matrice augmentée correspondante sont :

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= -2 \end{aligned}$$

et

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right],$$

respectivement.

La multiplication de la première équation par $\frac{1}{2}$ correspond à la multiplication de la première

ligne de la matrice par $\frac{1}{2}$, $L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$. Cette opération donne :

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{1}{2}x_2 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= -2 \end{aligned}$$

et

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

Ensuite, on ajoute la première équation à la seconde équation. Ceci correspond à l'addition de la première ligne de la matrice à la seconde ligne de la matrice, ou $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$. On obtient

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{1}{2}x_2 &= 0 \\ \frac{1}{2}x_2 - 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= -2 \end{aligned}$$

et

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

On ajoute ensuite le produit de la première équation par -3 à la troisième équation. Ceci correspond à ajouter le produit de la première ligne de la matrice par -3 à la troisième ligne de la matrice, $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$. Le résultat est

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{1}{2}x_2 &= 0 \\ \frac{1}{2}x_2 - 2x_3 &= 4 \\ -\frac{1}{2}x_2 + x_3 &= -2 \end{aligned}$$

et

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -2 \end{array}\right].$$

Nous continuons en ajoutant la deuxième équation à la troisième équation. Ceci correspond à l'addition de la deuxième ligne de la matrice à la troisième ligne de la matrice, ou $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$. On obtient

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{1}{2}x_2 &= 0 \\ \frac{1}{2}x_2 - 2x_3 &= 4 \\ -x_3 &= 2 \end{aligned}$$

et

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Notons que la troisième ligne donne $x_3 = -2$. Dans ce cas, on déduit de la seconde équation que $x_2 = 0$, et de la première que $x_1 = 0$. Nous avons obtenu l'unique solution du système.

Cependant, nous pouvons aussi décider de continuer ce procédé en multipliant la troisième équation par -1. Ceci correspond à la multiplication de la troisième ligne de la matrice par -1, $L_3 \leftarrow -L_3$. La matrice ainsi obtenue est

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

(Quel est le système d'équations correspondant?)

Après l'application de $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$, on obtient

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

L'application de $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ donne

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

Finalement, l'application de $L_2 \leftarrow 2L_2$ donne

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

Cette matrice finale correspond au système de trois équations linéaires dont les trois premières colonnes représentent les coefficients des variables x_1, x_2 et x_3, respectivement. La dernière colonne est l'uplet des constantes des équations. Ainsi, la matrice représente le système

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= -2 \end{aligned}$$

duquel on peut lire directement la solution.

Notons que la matrice des coefficients du système réduit n'a que des 1 sur sa diagonale principale. Tous les autres éléments sont nuls. Une matrice carré de cette forme est une **matrice identité**.

En résumé, on résoud un système d'équations linéaires en appliquant une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée associée, jusqu'à ce que l'on obtienne une matrice ressemblant à la matrice identité.

Ce n'est pas toujours possible, mais nous pouvons toujours réduire la matrice à une forme spéciale qui nous indique les solutions sans avoir à effectuer de calculs supplémentaires.

Finalement, si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des matrices que l'on peut transformer de l'une à l'autre en n'utilisant que des opérations élémentaires sur les lignes, on dit de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ qu'elles sont **équivalentes**.

Exercices

1. Écrivez la matrice augmentée associée à chacun des systèmes suivants.

   a. $$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 2x + y &= 5 \end{aligned}$$

   b. $$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ 2x + y - z &= 2 \\ x + 2y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

2. Qu'obtient-on après avoir appliqué $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ à $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$?

Solutions

1. a. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right]$

   b. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right]$

2. $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

3.7 Forme échelonnée réduite

Une matrice est sous **forme échelonnée réduite (FER)** si elle satisfait aux trois conditions suivantes :

1. À chaque ligne, l'élément non nul le plus à gauche est 1 et les autres éléments de la colonne qui contient ce 1 sont tous nuls. Ce 1 est un pivot de la matrice.
2. Le pivot de chaque ligne est à la droite des pivots des lignes supérieures.
3. Chaque ligne ne contenant que des éléments nuls se retrouve au bas de la matrice.

Par exemple, les matrices suivantes ne sont **pas** en FER :

— $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (L'élément non nul le plus à gauche de la deuxième ligne n'est pas égal à 1, ce qui contrevient à la première propriété.)

— $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (Le pivot de la deuxième ligne est à gauche du pivot de la première ligne, ce contrevient à la seconde propriété.)

— $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (Le pivot de la troisième ligne n'est pas le seul élément non nul dans sa colonne, ce qui contrevient à la première propriété.)

— $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (La deuxième ligne ne contient que des éléments nuls mais elle ne se retrouve pas au bas de las matrice, ce qui contrevient à la troisième propriété.)

Dans un système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, où $\mathbf{A}$ est en FER, on peut rapidement voir si le système admet une solution et comment la construire dans ce cas. Si $\mathbf{A}$ possède une ligne d'éléments nuls, disons la i-ième ligne, et que $b_i \neq 0$, alors il ne peut y avoir de solution car la i-ième équation se lirait « $0 = b_i \neq 0$ », ce qui est impossible. Par exemple, si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, le système devient

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 0 &= 4 \end{aligned}$$

Peu importe les valeurs de x_1 et x_2, la seconde équation ne peut être satisfaite.

Dans le cas contraire, on obtient une solution en fixant toutes les variables correspondant aux pivots à la valeur de la constante de la dernière colonne de la matrice augmentée, et les autres variables à 0. (Que faire si nous cherchons à obtenir toutes les solutions?)

Soit $\mathbf{A}$ une matrice définie sur un corps, de forme échelonnée réduite (FER). Les solutions de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ peuvent être lues immédiatement à même la matrice augmentée $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix}$. Dans ce qui suit, on jette un regard sur tous les scénarios possibles.

3.7.1 D'autres terminologies

Supposons que la matrice augmentée est $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$, qui est en FER. Les colonnes 1, 3 et 4 contiennent les pivots. Ces colonnes sont les **colonnes pivots**. Les autres colonnes sont les **colonnes libres**. Les variables correspondant aux colonnes pivots sont les **variables pivots**. Les autres variables sont appelées **variables libres**. La dernière colonne est la **colonne des constantes**.

3.7.2 Existence de solutions

Considérons, par exemple la matrice augmentée donnée par $\begin{bmatrix}1 & 3 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$. Notons que la troisième ligne ne contient que des nuls dans les colonnes correspondantes aux variables mais un élément non nul dans la colonne des constantes. Cela signifie qu'il n'y a pas de solution car l'équation représentée par la troisième ligne est $0 = 1$. En général, si une matrice augmentée est FER et contient une ligne de zéros à part pour la dernière position, alors le système n'admet **aucune solution**.

Si la matrice augmentée n'a pas de telle ligne, alors le système correspondant admet au moins une solution pouvant aisément être obtenue en donnant à chaque variable pivot la valeur correspondante de la constante et à chaque variable libre la valeur 0. Considérons, par exemple, la matrice augmentée est $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$. On trouve une solution en fixant les variables pivots $x_1 = 5$, $x_3 = 4$, $x_4 = 3$ et la variable libre $x_2 = 0$.

Dans le cas où la matrice augmentée en FER indique que le système correspondant admet au moins une solution, nous verrons que nous sommes en mesure de donner un description plus informative de l'ensemble-solution.

3.7.3 Solutions multiples

Supposons que le système admette une solution. Si la matrice augmentée contient une variable libre, le système admet en fait une infinité de solutions, à moins qu'il soit défini sur un corps fini. Considérons, par exemple, la matrice augmentée donnée par $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. La deuxième colonne est une colonne libre. La variable correspondante à cette colonne peut prendre n'importe quelle valeur et on obtient quand même une solution du système. Posons $x_2 = s$, on obtient alors une solution où $x_1 = -2s$, $x_3 = 0$ et $x_4 = 3$, c'est-à-dire que pour chaque valeur de s, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2s \\ s \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ est une solution. Par exemple, $s = 0$ nous obtenons $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, tandis que si $s = -1$ nous obtenons la solution $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Pour voir comment on obtient la solution générale, on écrit le système dans son entièreté :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 3. \end{aligned}$$

En prenant $x_2 = s$, on obtient

$$\begin{aligned} x_1 + 2s &= 0 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 3. \end{aligned}$$

Ensuite, il suffit de résoudre pour x_1 afin d'obtenir la solution générale.

3.7.4 Solution unique

Si le système admet une solution mais qu'il n'y a pas de colonne libre dans la matrice augmentée associé, alors le système admet une solution unique. Par exemple, si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ n'admet que la solution $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Exercices

1. Chacune des matrices suivantes est une matrice augmentée associée à un système d'équations linéaires rationnels. Déterminez si le système n'admet aucune solution, s'il admet une solution unique ou une infinité de solutions.

   a. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

   c. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Solutions

1. a. Aucune solution.
   b. Solution unique.
   c. Solution unique.

3.8 Élimination de Gauss-Jordan

À la section précédente, nous avons vu comment caractériser les solutions de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ si $\mathbf{A}$ est sous FER. En transformant un système général d'équations linéaires en un système équivalent ayant la FER, le problème est résolu. L'élimination de Gauss-Jordan est un algorithme de transformation menant à un système équivalent d'équations linéaires $\mathbf{Rx} = \mathbf{d}$, où $\mathbf{R}$ est sous FER, qui n'utilise que des opérations élémentaires sur les lignes. En langage courant, on dit que la transformation d'une matrice en FER est une **réduction**.

Rappelons les trois types d'opérations élémentaires permises:

1. $L_i \leftarrow \alpha L_i$ (on remplace la i-ième ligne par le produit de la i-ième ligne par α, où $\alpha \neq 0$)
2. $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ (on remplace la i-ième ligne par la somme de la i-ième ligne et du produit de la j-ième ligne par α, où $\alpha \neq 0$ et $i \neq j$)
3. $L_i \leftrightarrow L_j$ (on échange ligne i et ligne j, où $i \neq j$).

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$, et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

La matrice augmentée associée au système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ est $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$. Nous la transformons maintenant en matrice sous FER en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes.

L'élément de la première ligne se retrouvant dans la première colonne est le pivot de cette ligne. Nous devons donc nous assurer que tout les éléments sous ce pivot soient nuls en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes. Ceci peut être accomplit en appliquant $L_2 \leftarrow L_2 + (-2) \times L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$. La matrice résultante est

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right].$$

Notons que l'élément non nul le plus à gauche des deuxième et troisième lignes sont distincts de 1. Nous pouvons obtenir les valeurs requises en appliquant $L_2 \leftarrow -\frac{1}{4}L_2$ et

$L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3$. La matrice résultante est

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Le pivot de la troisième ligne se retrouve à la gauche de celui de la seconde ligne. Nous échangerons alors les deux lignes en appliquant $L_2 \leftrightarrow L_3$ afin d'obtenir

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} \end{array}\right].$$

On transforme l'élément au-dessus du pivot de la deuxième ligne en appliquant $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ afin d'obtenir

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} \end{array}\right].$$

Il ne reste qu'à transformer les éléments au-dessus du pivot de la troisième ligne en appliquant $L_1 \leftarrow L_1 + (-3) \times L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 + (-1) \times L_3$ afin d'obtenir

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} \end{array}\right].$$

Cette matrice est sous FER. Les variables correspondantes aux trois premières colonnes sont des variables pivots. *Une* des solutions de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ est alors donnée par $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5/4 \\ 3/4 \\ 5/4 \\ 0 \end{bmatrix}$.

On obtient toutes les solutions en posant $x_4 = s$ (la seule variable libre) et en résolvant ensuite pour les variables pivots x_1, x_2, x_3 en terme du paramètre s. Les solutions prennent alors la forme $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} - 2s \\ \frac{3}{4} - s \\ \frac{5}{4} \\ s \end{bmatrix}$, pour $s \in \mathbb{R}$.

Remarque: La FER d'une matrice est unique. Indépendamment de la séquence des opérations élémentaires utilisées, le résultat final est toujours le même.

3.8.1 Pseudo-code

Il est possible de codifier la procédure. Voici le pseudo-code pour l'implémentation de la réduction d'une matrice $\mathbf{A}$ de dimension $m \times n$:

- poser $p = 1$
- pour $k = 1, \ldots, n$, alors
  - s'il existe $i \in \{p, \ldots, m\}$ tel que $a_{ik} \neq 0$, alors
    - si $i \neq p$, échanger la p-ième ligne et la i-ième ligne
    - appliquer $L_p \leftarrow \alpha^{-1} L_p$, où α est l'élément de la colonne k de la ligne p
    - appliquer $L_q \leftarrow L_q - \alpha_q L_R$ pour tout $q \neq p$, où α_q est l'élément de la colonne k de la q-ième ligne
    - $p = p + 1$
    - arrêter lorsque $p > m$

Exercices

1. Transformer chacune des matrices suivantes en FER en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes.

   a. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

2. Déterminez tous les nombres réels x, y, z satisfaisant au système d'équations linéaires

$$3x - 2y - z = 1$$
$$2z + x - y = 5$$

3. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $\mathbb{K}$ un corps. Démontrez l'unicité de la FER de $\mathbf{A}$.

Solutions

1. a. Notons que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b. Notons que

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Ce système peut s'écrire sous la forme $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$. (Faites attention. Les variables de la deuxième équation sont données de façon désordonnée dans la question.) La matrice augmentée du système est

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right].$$

L'application de $L_1 \leftrightarrow L_2$ donne

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

L'application de $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ donne

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -7 & -14 \end{array}\right].$$

L'application de $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ donne

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 1 & -7 & -14 \end{array}\right].$$

Ainsi, z est la seule variable libre. En prenant $z = s$, la deuxième ligne devient $y - 7s = -14$ et la première ligne devient $x - 5s = -9$. Donc, les solutions sont $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 + 5s \\ -14 + 7s \\ s \end{bmatrix}$ pour $s \in \mathbb{R}$.

3. Ce résultat signifie que l'on peut parler de *la* forme échelonnée réduite de $\mathbf{A}$.

Supposons que $\mathbf{A}$ puisse être transformée en deux matrices en FER $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ en appliquant différentes suites d'opérations élémentaires sur les lignes. Nous voulons montrer que $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

Premièrement, notons que les systèmes $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{Cx} = \mathbf{0}$ doivent avoir les mêmes solutions que $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

Soit i le plus petit indice tel que $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ diffèrent à la i-ième colonne. Parce que $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ sont en FER, $\mathbf{B}_i$ (colonne i de $\mathbf{B}$) et $\mathbf{C}_i$ ne peuvent être tous les deux des colonnes pivots. Sans perte de généralité, on suppose que $\mathbf{C}_i$ n'est pas une colonne pivot. Donc, x_i est une variable libre pour $\mathbf{Cx} = \mathbf{0}$. En résolvant pour $\mathbf{x}$ dans $\mathbf{Cx} = \mathbf{0}$ (après avoir fixé $x_i = 1$) et toutes les autres variables libres par 0, on obtient une solution $\mathbf{x}'$ telle que $x'_i = 1$ et $x'_j = 0$ pour tout $j > i$. Puisque

$\mathbf{Cx}' = \mathbf{0}$ et $\mathbf{B}_j = \mathbf{C}_j$ pour $j = 1, \ldots, i-1$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbf{Bx}' &= \mathbf{Bx}' - \mathbf{Cx}' \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{B}_j x'_j - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{C}_j x'_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{B}_j - \mathbf{C}_j) x'_j \\
&= \sum_{j=1}^{i} (\mathbf{B}_j - \mathbf{C}_j) x'_j \\
&= (\mathbf{B}_i - \mathbf{C}_i) x'_i \\
&= \mathbf{B}_i - \mathbf{C}_i \neq \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbf{x}'$ n'est pas une solution de $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$, ce qui contredit que $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{Cx} = \mathbf{0}$ ont les mêmes solutions.

3.9 Décrire les ensembles solutions

3.9.1 Motivation

Considérons le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ réel donné par $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$, et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$. Notons que $\mathbf{A}$ est sous forme échelonnée réduite et que toutes ses lignes contiennent au moins deux éléments non nuls. Le système admet donc au moins une solution. Puisqu'il y a deux variables libres x_2 et x_5, le système admet en fait une infinité de solutions. Comment peut-on les décrire?

On doit exprimer chaque variable libre à l'aide d'un paramètre. Dans notre cas, nous avons $x_2 = s$ et $x_5 = t$, d'où

$$\begin{aligned} x_1 + 2s - t &= 4 \\ x_3 + 2t &= 5 \\ x_4 + 3t &= 6. \end{aligned}$$

En résolvant pour x_1, x_3 et x_4, on obtient $x_1 = 4 - 2s + t$, $x_3 = 5 - 2t$, $x_4 = 6 - 3t$.

Les solutions sont alors $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 2s + t \\ s \\ 5 - 2t \\ 6 - 3t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, où s et t sont des nombres arbitraires.

Considérons maintenant le système définit sur $GF(2)$.

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ici, x_3 est une variable libre. On peut pose alors x_3 comme paramètre et on exprime x_1 et x_2 en terme de x_3 :

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + x_3 \\ x_2 &= x_3. \end{aligned}$$

Il n'y a que deux choix possible: $x_3 = 0$ ou $x_3 = 1$.

En prenant $x_3 = 0$, on obtient la solution $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

En prenant $x_3 = 1$, on obtient la solution $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3.9.2 Systèmes homogènes

Considérons le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ définit sur les réels, où $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$. Notons que, dans ce cas, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$.

La matrice augmentée associée à ce système est $\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \end{array}\right]$, qui est déjà sous forme échelonnée réduite. Les les colonnes 1, 3 et 5 sont les colonnes pivots; Les variables libres sont x_2, x_4 et x_6.

En posant $x_2 = s$, $x_4 = t$ et $x_6 = u$, on obtient la solution

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 - 2s + t - 3u \\ s \\ 7 + t - 4u \\ t \\ 8 - 5u \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

peu importe le choix de s, t et u.

Notons que chacun des uplets $\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}-3\\0\\-4\\0\\-5\\1\end{bmatrix}$ est une solution du **système homogène** $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Un système homogène d'équations linéaires est un système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tel que $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

En général, les solutions de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ nous informent au sujet des solutions de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Supposons que x^* et x' soient des solutions de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, c'est-à-dire, $\mathbf{Ax}^* = \mathbf{b}$ et $\mathbf{Ax}' = \mathbf{b}$. Alors $A(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}') = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Du coup, si $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}'$, alors $\tilde{\mathbf{x}}$ est une solution de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

Conséquemment, une fois que nous connaissons une solution de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, disons $\mathbf{x}^*$, chaque autre solution diffère de $\mathbf{x}^*$ par une solution de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Autrement dit, l'ensemble des solutions de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ est donné par $\{\mathbf{x}^* + \mathbf{d} \ : \ \mathbf{Ad} = \mathbf{0}\}$. La solution $\mathbf{x}^*$ est une **solution particulière** du système.

En bref, connaître une solution particulière de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ et toutes les solutions de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ nous permet de connaître toutes les solutions de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Finalement, notons que $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ admet toujours la **solution triviale** (l'uplet composé entièrement de 0). Tout autre solution de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ est une **solution non triviale**.

Exercices

1. Pour chacun des systèmes suivants, donnez une description de l'ensemble-solution.

   a. $\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ y - 2z &= 2 \end{aligned}$

   b. $3x - 4y + z = 12$

   c. $\begin{aligned} x_1 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$

2. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\0 & -1 & 3\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}$. Est-ce que le système homogène $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ admet une solution non triviale?

3. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, où $\mathbb{K}$ est un corps. Soit $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{d} \in \mathbb{K} \ : \ \mathbf{Ad} = \mathbf{0}\}$. Soit $\mathbf{x}^*, \mathbf{x}' \in \mathbb{K}^n$.

a. Montrez que $\mathbf{A}(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}') = \mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{A}\mathbf{x}'$.

b. Soit $\mathbf{z} = \mathbf{x}^* + \mathbf{x}'$. Montrez que si $\mathbf{x}^*, \mathbf{x}' \in \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$, alors $\mathbf{z} \in \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$.

c. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Soit $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{x}^*$. Montrez que si $\mathbf{x}^* \in \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$, alors $\mathbf{u} \in \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$.

Solutions

1. a. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, où s est un réel arbitraire.

   b. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, où s et t sont des réels arbitraires.

   c. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, où s et t sont des réels arbitraire.

2. Oui. Par exemple, $\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ est une solution non triviale du système homogène.

3.10 Exemple de test portant sur la matière de ce chapitre

1. Déterminez toutes les solutions réelles du système

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

.

2. Pour quelle valeur réelle a est-ce que le système

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ -x - y - 3z &= 0 \\ y + z &= a \end{aligned}$$

n'admet *aucune* solution?

3. Soient $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}$. Écrivez le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dans son entièreté.

4. Montrez que le système

$$\begin{aligned} x - 2y &= 3 \\ x + y &= 0 \end{aligned}$$

peut se transformer en

$$\begin{aligned} y &= -1 \\ x - 2y &= 3 \end{aligned}$$

en utilisant des opérations élémentaires.

5. Soit $x = 2t - 1$ et $y = -t + 1$. Pour quelles valeurs de t la paire x, y est-elle une solution du système suivant?

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x - y &= 2 \end{aligned}$$

6. Déterminez toutes les solutions du système suivant, définit sur $GF(2)$:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

7. Soient $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ un uplet de variables. Trouvez toutes les solutions de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.
8. Soient $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. Montrez que $\mathbf{A}$ se transforme en $\mathbf{B}$ à l'aide d'une seule suite de **deux** opérations élémentaires.

Solutions

1. Nous utilisons d'abord la première équation afin d'exprimer x_1 en terme des autres variables: $x_1 = 1 + 2x_2 - x_3$. En substituant x_1 dans la deuxième équation, on obtient

$$(1 + 2x_2 - x_3) - x_2 - x_3 = 0,$$

ce qui se simplifie à

$$x_2 - 2x_3 = -1.$$

On peut donc remplacer x_3 par un paramètre réel s, et obtenir $x_2 = -1 + 2s$, et $x_1 = 1 + 2(-1 + 2s) - s = -1 + 3s$. Les solutions sont données par $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 3s \\ -1 + 2s \\ s \end{bmatrix}$, pour tout $s \in \mathbb{R}$.

2. La première équation devient $x = 1+y-z$. On substitue dans la deuxième équation et on obtient $-(1 + y - z) - y - 3z = 0$, d'où $-2y - 2z = 1$. La multiplication de chaque côté par $-\frac{1}{2}$ nous donne $y + z = -\frac{1}{2}$. Notons que cette équation a le même côté gauche que la troisième équation. Donc, si $a \neq -\frac{1}{2}$, le système n'admet aucune solution. Mais si $a = -\frac{1}{2}$, alors $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - 2t \\ -\frac{1}{2} - t \\ t \end{bmatrix}$ est une solution pour chaque $t \in \mathbb{R}$.

3. Notons que $\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 0x_3 \end{bmatrix}$. Dans son entièreté, le système est

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 8 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 9. \end{aligned}$$

4. La deuxième équation du second système est identique à la première équation du premier système. Si on applique l'opération élémentaire d'échanger les positions de deux équations dans le premier système, on obtient

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ x - 2y &= 3. \end{aligned}$$

Le coefficient de x est nul dans la première équation du système visé. Il faut alors éliminer x en ajoutant le produit de la deuxième équation par -1 à la première

équation afin d'obtenir

$$\begin{aligned} 3y &= -3 \\ x - 2y &= 3. \end{aligned}$$

Nous pouvons finaliser la transformation en multipliant la première équation par $\frac{1}{3}$.

5. En substituant x et y dans le système, on obtient

$$\begin{aligned} (2t-1) + (-t+1) &= 1 \\ 2(2t-1) - (-t+1) &= 2. \end{aligned}$$

La simplification à gauche donne

$$\begin{aligned} t &= 1 \\ 5t - 3 &= 2 \end{aligned}$$

Il n'y a qu'une solution, $t = 1$.

6. La matrice augmentée associée au système est $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$. Nous réduisons cette matrice comme suit (gardant en tête que $1 + 1 = 0$ dans $GF(2)$) :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_2 + L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_2 + L_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Ainsi, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ est l'unique solution.

7. Observons que $\mathbf{A}$ est déjà sous FER. Les variables libres sont x_2 et x_4. Donc, on

pose $x_2 = s$ et $x_4 = t$, où $s, t \in \mathbb{R}$.

Notons que le système est

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_4 &= 0 \\ x_3 &= 0, \end{aligned}$$

donc, $x_1 = -2s - t$ et $x_3 = 0$. Ainsi, les solutions sont

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - t \\ s \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

pour tout choix possible de nombres réels s et t.

8. Observons que $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ diffèrent à la deuxième ligne et la troisième ligne. La condition que $\mathbf{A}$ doit être transformée en $\mathbf{B}$ avec seulement deux opérations élémentaires nous force à appliquer une opération afin de modifier la deuxième ligne et une autre afin de modifier la troisième ligne.

   Notons que la troisième ligne de $\mathbf{A}$ a un élément non nul dans la première colonne et la seule autre ligne de $\mathbf{A}$ ayant cette même propriété est la première. Donc, nous pouvons éliminer le pivot de la troisième ligne en utilisant l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$. Le résultat est $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. Appelons cette matrice $\mathbf{A}'$.

   Notons que $\mathbf{A}'$ et $\mathbf{B}$ diffèrent seulement à la deuxième ligne. En fait, la deuxième ligne de $\mathbf{A}'$ est le triple de la deuxième ligne de $\mathbf{B}$, d'où $\mathbf{A}' \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2} \mathbf{B}$.

Chapitre 4

Matrices

Ce chapitre introduit la notion de la multiplication de matrices, ainsi que certaines opérations matricielles communes. La maîtrise du matériel de ce chapitre permet de :

- Évaluer ou simplifier des expressions matricielles.
- Définir et calculer l'inverse d'une matrice carrée.
- Déterminer si une matrice carré est inversible.
- Définir les matrice élémentaires.
- Décomposer une matrice carrée en terme du produit de matrices élémentaires.
- Définir et caractériser les matrices singulières.
- Énoncer et prouver de nombreuses propriétés des matrices.

Pour ce chapitre, les connaissances requises incluent l'arithmétique dans les corps finis et la résolution de système d'équations linéaires en utilisant la réduction.

4.1 Multiplication de matrices

Soit S un anneau. Soient $\mathbf{B} \in S^{m\times p}$ et $\mathbf{x} \in S^p$.

Le produit $\mathbf{Bx}$ est défini par le m-uplet

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{p} b_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{p} b_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} b_{mj}x_j. \end{bmatrix}$$

Rappelons que b_{ij} (ou $b_{i,j}$) dénote l'élément (i, j) de $\mathbf{B}$, c'est-à-dire l'élément à la i-ième ligne et la j-ième colonne de $\mathbf{B}$.

Soit $\mathbf{A} \in S^{p\times n}$. Le produit $\mathbf{BA}$ est défini par la matrice telle que la j-ième colonne est donnée par $\mathbf{BA}_j$ pour $j = 1, \ldots, n$. Ici, $\mathbf{A}_j$ dénote la j-ième colonne de $\mathbf{A}$.

Exemple 4.1. Soient $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Alors $\mathbf{BA}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(1) + 0(3) \\ -1(1) + 1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, et $\mathbf{BA}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(2) + 0(5) \\ -1(2) + 1(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, d'où $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Exemple 4.2. Soient $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Alors $\mathbf{AB}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(1) + 2(-1) + 3(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$, et $\mathbf{AB}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(4) + 2(1) + 3(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$. Ainsi, $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix}$.

Exemple 4.3. Soient $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}$.

Alors $\mathbf{AB}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$, et $\mathbf{AB}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \end{bmatrix}$. Ainsi, $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -6 & -10 \end{bmatrix}$.

Notons que le produit de $\mathbf{AB}$ est défini seulement lorsque le nombre de colonnes de $\mathbf{A}$ est le même que le nombre de lignes de $\mathbf{B}$.

En général $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ (quoique cela peut arriver). Par exemple, il est possible que le produit $\mathbf{AB}$ soit défini sans que $\mathbf{BA}$ ne le soit (lorsque le nombre de colonnes de $\mathbf{B}$ n'est pas identique au nombre de lignes de $\mathbf{A}$.)

Exemple 4.4. Soient $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Alors $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mais $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Exemple 4.5. Soient $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Alors $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ mais le produit $\mathbf{BA}$ n'est pas défini.

Exercices

1. Calculez chacun des produits de matrices suivants.
   a. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$
   b. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$
   c. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$
2. Soient $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
   a. Calculez $\mathbf{AB}$ et $\mathbf{BC}$.
   b. Utilisez les résultats de la partie précédant pour calculez $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ et $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$. Que pouvez-vous dire à propos de ces produits?

Solutions

1. a. $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 2 & 8 & 14 \end{bmatrix}$.

   b. $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

   c. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$.

2. a. $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -1 & 6 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{BC} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

   b. Les deux produits sont égaux à $\begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \end{bmatrix}$.

4.2 Associativité de la multiplication de matrices

Soit S un anneau. Soient $\mathbf{A} \in S^{m\times p}$, $\mathbf{B} \in S^{p\times n}$, et $\mathbf{Q}$ le produit $\mathbf{AB}$.

La i-ième ligne de $\mathbf{Q}$ est donnée par $\mathbf{A}_{i,}\mathbf{B}$, où $\mathbf{A}_{i,}$ dénote la i-ième ligne de $\mathbf{A}$.

Par exemple, si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, alors la deuxième ligne de $\mathbf{AB}$ est

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Rappelons que d'après la définition du produit de matrices, la j-ième colonne de $\mathbf{Q}$ est $\mathbf{AB}_j$, où $\mathbf{B}_j$ dénote la j-ième colonne de $\mathbf{B}$.

Ainsi, $q_{i,j}$, l'élément à la j-ième colonne de $\mathbf{A}_{i,}\mathbf{B}$, est

$$\mathbf{A}_{i,}\mathbf{B}_j = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,p}b_{p,j}.$$

D'après l'exemple ci-dessus, l'élément $(3, 2)$ de $\mathbf{AB}$ est donné par $\begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 4.$

La multiplication de matrices n'est pas nécessairement commutative, mais elle est associative.

Théorème 4.1. *Soit S un anneau. Si $\mathbf{A} \in S^{m\times p}$, $\mathbf{B} \in S^{p\times q}$ et $\mathbf{C} \in S^{q\times n}$, alors*

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}.$$

Le théorème 4.1 permet de simplifier plusieurs expressions matricielles. En particulier, nous pouvons écrire $\mathbf{ABC}$ sans avoir à se soucier de l'ordre dans lequel la multiplication est effectuée.

Démonstration. (Théorème 4.1) Soit $\mathbf{A}_{i,}$ la i-ième ligne de $\mathbf{A}$. Posons $\mathbf{P} = \mathbf{BC}$.

L'élément (i, j) de $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ est donné par

$$\mathbf{A}_{i,}\mathbf{P}_j = a_{i,1}p_{1,j} + a_{i,2}p_{2,j} + \cdots + a_{i,p}p_{p,j}.$$

Mais $\mathbf{P}_j = \mathbf{B}\mathbf{C}_j$. Ainsi, $p_{s,j} = b_{s,1}c_{1,j} + b_{s,2}c_{2,j} + \cdots + b_{s,q}c_{q,j}$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{i,}\mathbf{P}_j &= a_{i,1}(b_{1,1}c_{1,j} + b_{1,2}c_{2,j} + \cdots + b_{1,q}c_{q,j}) \\
&\quad + a_{i,2}(b_{2,1}c_{1,j} + b_{2,2}c_{2,j} + \cdots + b_{2,q}c_{q,j}) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + a_{i,p}(b_{p,1}c_{1,j} + b_{p,2}c_{2,j} + \cdots + b_{p,q}c_{q,j}) \\
&= (a_{i,1}b_{1,1} + a_{i,2}b_{2,1} + \cdots + a_{i,p}b_{p,1})c_{1,j} \\
&\quad + (a_{i,1}b_{1,2} + a_{i,2}b_{2,2} + \cdots + a_{i,p}b_{p,2})c_{2,j} \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (a_{i,1}b_{1,q} + a_{i,2}b_{2,q} + \cdots + a_{i,p}b_{p,q})c_{q,j} \\
&= (\mathbf{A}_{i,}\mathbf{B}_1)c_{1,j} + (\mathbf{A}_{i,}\mathbf{B}_2)c_{2,j} + \cdots + (\mathbf{A}_{i,}\mathbf{B}_q)c_{q,j}.
\end{aligned}$$

Posons $\mathbf{Q} = \mathbf{A}\mathbf{B}$. Alors $q_{i,r} = \mathbf{A}_{i,}\mathbf{B}_r$, d'où l'élément (i,j) de $(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C}$ est

$$\begin{aligned}
&q_{i,1}c_{1,j} + q_{i,2}c_{2,j} + \cdots + q_{i,q}c_{q,j} \\
&= (\mathbf{A}_{i,}\mathbf{B}_1)c_{1,j} + (\mathbf{A}_{i,}\mathbf{B}_2)c_{2,j} + \cdots + (\mathbf{A}_{i,}\mathbf{B}_q)c_{q,j} \\
&= \mathbf{A}_{i,}\mathbf{P}_j.
\end{aligned}$$

Ainsi, l'élément (i,j) de $\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C})$ est identique à l'élément (i,j) de $(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C}$. Il s'ensuit que $\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C}$. □

Exercices

1. Déterminez l'élément $(2,2)$ des matrices suivantes.

   a. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Solutions

1. a. 6
   b. 2

4.3 Matrice identité

Soient S un anneau et n un entier positif. La **matrice identité** de $S^{n\times n}$, dénotée par $\mathbf{I}_n$, est la matrice pour laquelle tous les éléments sont nuls, sauf ceux sur la diagonale (à partir d'en haut à gauche jusqu'en bas à droite) qui prennent la valeur 1.

Par exemple, $\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

On omet l'indice n si le contexte rend la situation claire.

La matrice identité joue un rôle important dans l'arithmétique matricielle.

Proposition 4.1. *Si $\mathbf{A} \in S^{n\times m}$ et $\mathbf{B} \in S^{p\times n}$, alors*

$$\mathbf{I}_n\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

et

$$\mathbf{B}\,\mathbf{I}_n = \mathbf{B}.$$

Exemple 4.6.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot a + 0\cdot c & 1\cdot b + 0\cdot d \\ 0\cdot a + 1\cdot c & 0\cdot b + 1\cdot d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Démonstration. (Proposition 4.1) Démontrons que $\mathbf{I}_n\mathbf{A} = \mathbf{A}$. L'autre preuve est semblable et est laissée en exercice.

Soit $\mathbf{D} = \mathbf{I}_n$. Posons $\mathbf{C} = \mathbf{DA}$. Alors

$$c_{i,j} = \sum_{p=1}^{n} d_{i,p}a_{p,j}.$$

Puisque $d_{i,p} = 0$ pour chaque $p \neq i$ et que $d_{i,i} = 1$, il s'ensuit que $c_{i,j} = d_{i,i}a_{i,j} = a_{i,j}$. Autrement dit, l'élément (i, j) de $\mathbf{C}$ est précisément l'élément (i, j) de $\mathbf{A}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$. Ainsi, $\mathbf{C} = \mathbf{A}$, tel que désiré. □

Exercices

1. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$. Déterminez une matrice $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ telle que
$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_2.$$
2. Soient $\mathbb{K}$ un corps et p, n des entiers positifs. Démontrez que si $\mathbf{B} \in \mathbb{K}^{p\times n}$, alors $\mathbf{B}\,\mathbf{I}_n = \mathbf{B}$.

Solutions

1. $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$.
2. Soit $\mathbf{D} = \mathbf{I}_n$. Posons $\mathbf{C} = \mathbf{BD}$. Quelle valeur prend $c_{i,j}$?

4.4 Matrices élémentaires

Dans cette section, nous allons voir que lorsque l'on applique à une matrice à éléments dans un corps une opération élémentaire sur les lignes, on obtient le même résultat qu'en multipliant à gauche la matrice par une matrice particulière.

Pour illustrer le concept, on applique à $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ chacune des trois types d'opération élémentaire sur les lignes.

1. **L'échange de deux lignes**

   Supposons que l'on échange les lignes 1 et 3 ($L_1 \leftrightarrow L_3$). La matrice obtenue est $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Notons que cette matrice est identique au produit $\mathbf{MA}$, où $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Observons que $\mathbf{M}$ est obtenue de $\mathbf{I}_3$ en échangeant les lignes 1 et 3.

   Si on échange de nouveau les lignes 1 et 3, on obtient de nouveau $\mathbf{A}$. On peut vérifier que $\mathbf{MMA} = \mathbf{A}$, ce qui n'est pas surprenant car un deuxième échange de la même paire de lignes revient à ne pas faire d'échange au départ.

   En général, la **matrice élémentaire** représentant $L_i \leftrightarrow L_j$ est obtenue en échangeant les lignes correspondantes de $\mathbf{I}$.

2. **La multiplication d'une ligne par une constante non nulle.**

   Supposons que l'on multiplie la seconde ligne de $\mathbf{A}$ par $\frac{1}{2}$ ($L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$). La matrice obtenue est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Notons que cette matrice est identique au produit $\mathbf{MA}$, où $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Observons que $\mathbf{M}$ est obtenue de $\mathbf{I}_3$ en multipliant la seconde ligne par $\frac{1}{2}$.

   Si on multiplie la seconde ligne de la matrice obtenue par 2, on obtient de nouveau $\mathbf{A}$. On peut vérifier que $\mathbf{UMA} = \mathbf{A}$, où $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ce qui n'est pas

surprenant puisque en multipliant par 2 une ligne précédemment multipliée par $\frac{1}{2}$, nous obtenons la ligne originale.

En général, la **matrice élémentaire** représentant $L_i \leftarrow \alpha L_i$, où $\alpha \neq 0$, est obtenue par multiplication de la i-ième ligne de la matrice identité par α.

3. **L'ajout d'un multiple d'une ligne par une constante à une autre ligne**

   Supposons que la troisième ligne de $\mathbf{A}$ est remplacée par la somme de produit de la première ligne par 2 et de la troisième ligne ($L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$). La matrice obtenue est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Notons que cette matrice est identique au produit $\mathbf{MA}$, où $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   Quelle opération élémentaire sur les lignes renverse cette opération? Nous devons soustraire 2 fois la première ligne de la troisième ligne. En prenant $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, on voit que $\mathbf{UMA} = \mathbf{A}$.

   En général, la **matrice élémentaire** représentant $L_j \leftarrow L_j + \alpha L_i$ est obtenue de la matrice identité en additionant α fois la i-ième à la j-ième ligne. Par exemple, la matrice qui représente $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_4$ pour une matrice de cinq lignes est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Cette matrice est obtenue de la matrice identité 5×5 en ajoutant 3 fois la quatrième ligne à la deuxième ligne.

4.4.1 La réduction en tant que série de multiplication de matrices

Nous avons vu à la discussion précédente que chaque opération élémentaire sur les lignes peut être renversée. En langage technique, ceci veut dire que les opérations élémentaires sur les lignes sont inversibles. Cela signifie que l'application des opérations élémentaires sur les lignes d'un système d'équations linéaires n'a pas comme résultat la perte ou le gain de solutions, ce qui justifie l'application des opérations élémentaires à la résolution de système linéaires.

Nous avons aussi vu que la réduction est une série de multiplication à gauche par des matrices élémentaires. En prenant le produit de toutes les matrices élémentaires de la série,

on obtient une seule matrice qui capture les actions combinées de cette série. Conséquemment, il existe une matrice $\mathbf{M}$ telle que la forme échelonnée réduite de $\mathbf{A}$ est $\mathbf{MA}$. Nous verrons un exemple dans la section suivante.

Exercices

1. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Trouvez une matrice élémentaire $\mathbf{M}$ telle que $\mathbf{MA} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.
2. Donnez la matrice 4×4 qui représente la série suivante d'opérations élémentaires sur les lignes appliquées à un système de quatre équations linéaires : $L_2 \leftrightarrow L_4$, $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3$, $L_1 \leftarrow 2L_1$.

Solutions

1. $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

2. La matrice est $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Notons que cette matrice peut être obtenue de $\mathbf{I}_4$ en appliquant directement la série d'opérations élémentaires sur les lignes.

4.5 Exemples de matrices élémentaires

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Nous allons obtenir la FER de $\mathbf{A}$ en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes. Dans ce qui suit, chaque étape montre l'état actuel de la matrice et l'opération élémentaire sur les lignes à appliquer afin d'obtenir la prochaine matrice. La matrice élémentaire correspondant à chaque opération est indiquée en parenthèses.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \left(\mathbf{M}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left(\mathbf{M}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left(\mathbf{M}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + (-2)L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \left(\mathbf{M}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

La dérivation précédente montre que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{(1)} \mathbf{A},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{(2)} (\mathbf{M}^{(1)} \mathbf{A}),$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{(3)} (\mathbf{M}^{(2)} (\mathbf{M}^{(1)} \mathbf{A})),$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{(4)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{(4)}(\mathbf{M}^{(3)}(\mathbf{M}^{(2)}(\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{A}))).$$

D'après le dernière égalité, on remarque que $\mathbf{M}^{(4)}(\mathbf{M}^{(3)}(\mathbf{M}^{(2)}(\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{A}))) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Le côté gauche est en désordre, mais nous savons maintenant qu'il existe une matrice $\mathbf{M}$ telle que

$$\mathbf{MA} = \mathbf{M}^{(4)}(\mathbf{M}^{(3)}(\mathbf{M}^{(2)}(\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{A}))).$$

En effet, il découle du théorème 4.1 que

$$\mathbf{M}^{(4)}(\mathbf{M}^{(3)}(\mathbf{M}^{(2)}(\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{A}))) = (\mathbf{M}^{(4)}(\mathbf{M}^{(3)}(\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{M}^{(1)})))\mathbf{A}.$$

Nous pouvons d'abord calculer $\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{M}^{(1)}$, puis calculer $\mathbf{M}^{(3)}(\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{M}^{(1)})$, et finalement calculer $\mathbf{M}^{(4)}(\mathbf{M}^{(3)}(\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{M}^{(1)}))$. Cela nous donne $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Il est facile de vérifier que $\mathbf{MA} = \mathbf{I}_3$.

Remarque. S'il n'est pas nécessaire de spécifier chacune des matrices élémentaires, on peut obtenir $\mathbf{M}$ directement en appliquant la même série d'opérations élémentaires sur les lignes à la matrice identité $\mathbf{I}_3$. (À essayer.)

La matrice $\mathbf{M}$ est l'**inverse à gauche** de $\mathbf{A}$. Lorsque l'on la multiplie à gauche de $\mathbf{A}$, on obtient la matrice identité. Ce aussi le cas si nous multiplions à la droite de $\mathbf{A}$, c'est-à-dire que $\mathbf{AM} = \mathbf{MA} = \mathbf{I}_3$. Comme nous allons le voir dans la section suivante, ce n'est pas un coïncidence.

Exercices

1. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{5\times m}$, $m \geq 1$. Soit $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. À quoi équivalant le produit $\mathbf{MA}$?

   a. Échanger les lignes 2 et 3, pour ensuite échanger les lignes 3 et 5.

   b. Échanger les lignes 2 et 3 pour ensuite échanger les lignes 2 et 5.

   c. Échanger les lignes 3 et 5 pour ensuite échanger les lignes 2 et 3.

2. Trouvez un inverse à gauche de chacune des matrices suivantes.

   a. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Solutions

1. Échanger les lignes 2 et 3 et ensuite échanger les lignes 3 et 5.
2. a. $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

   b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

4.6 Résolution d'équations matricielles

Soient $\mathbb{K}$ un corps et m, n, p des entiers positifs. Soient $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ et $\mathbf{B} \in \mathbb{K}^{n\times p}$.

On obtient $\mathbf{X} \in \mathbb{K}^{n\times p}$ satisfaisant à $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ en résolvant $\mathbf{AX}_i = \mathbf{B}_i$ pour chaque $i = 1, \ldots, p$.

Nous sommes donc intéressés à résoudre le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ pour différents uplets $\mathbf{b}$, ce que l'on peut faire simplement en formant une matrice augmentée généralisée et appliquant la réduction tel qu'illustré à l'exemple suivant.

Exemple 4.7. Soient $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{b}' = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ des matrices réelles. On trouve toutes les solutions de chacun des systèmes $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ et $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}'$, où $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

Si on réduit $\left[\mathbf{A} \quad \mathbf{b}\right]$ à $\left[\mathbf{R} \quad \mathbf{d}\right]$ et $\left[\mathbf{A} \quad \mathbf{b}'\right]$ à $\left[\mathbf{R}' \quad \mathbf{d}'\right]$, on doit avoir $\mathbf{R} = \mathbf{R}'$ puisque ce sont toutes deux des FER de $\mathbf{A}$, qui est unique. Ainsi, la même suite d'opérations élémentaires sur les lignes appliquée au système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ réduit $\left[\mathbf{A} \quad \mathbf{b}'\right]$ à $\left[\mathbf{R}' \quad \mathbf{d}'\right]$. Conséquemment, nous pouvons réduire $\left[\mathbf{A} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{b}'\right]$ pour résoudre les deux systèmes simultanément :

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right]$$

Dans cette dernière matrice augmentée, les quatre premières colonnes forment la matrice réduite de $\left[\mathbf{A} \quad \mathbf{b}\right]$, tandis que les trois premières colonnes et la dernière colonne forment

la matrice réduite de $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}'\end{bmatrix}$. Ainsi, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ admet $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ \frac{1}{2} \\ t \end{bmatrix}$ comme solution pour tout $t \in \mathbb{R}$, mais $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}'$ n'admet aucune solution. Autrement dit, il y a une infinité de manières d'exprimer $\mathbf{b}$ en tant que combinaison linéaire des colonnes de $\mathbf{A}$, mais aucune façon de le faire pour $\mathbf{b}'$. Cette interprétation sera revisitée lorsque l'on parlera de l'espace des colonnes d'une matrice.

Exercice

1. Soient $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}' = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{b}'' = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ des matrices réelles. Déterminez toutes les solutions de chacun des systèmes $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}'$, et $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}''$.

Solution

1. La FER de $\left[\begin{array}{cccc}\mathbf{A} & \mathbf{b} & \mathbf{b}' & \mathbf{b}''\end{array}\right]$ est

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & -7 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -3 \end{array}\right].$$

Ainsi,

— $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ admet l'unique solution $\begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$,

— $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}'$ admet l'unique solution $\begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$,

— $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}''$ admet l'unique solution $\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$.

4.7 Matrices inverses

Soient $\mathbf{A}, \mathbf{M}, \mathbf{N} \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\mathbb{K}$ un corps. Si $\mathbf{MA} = \mathbf{I}_n$, alors $\mathbf{M}$ est un **inverse à gauche** de $\mathbf{A}$. Si $\mathbf{AN} = \mathbf{I}_n$, alors $\mathbf{N}$ est un **inverse à droite** de $\mathbf{A}$.

Nous devons spécifier la gauche et la droite puisque la multiplication de matrices n'est pas nécessairement commutative, c'est-à-dire qu'il existe matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ pour lesquelles $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. A priori, il est fort possible que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$ mais que $\mathbf{BA} \neq \mathbf{I}_n$.

Ceci étant dit, les inverses à gauche sont aussi des inverses à droite et *vice versa*.

Proposition 4.2. *Soient $\mathbf{A}, \mathbf{N} \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\mathbb{K}$ un corps. Si $\mathbf{NA} = \mathbf{I}$, alors $\mathbf{AN} = \mathbf{I}$.*

Avant d'en voir la preuve, notons que l'énoncé précédant montre aussi qu'un inverse de droite est aussi un inverse à gauche puisque l'on peut considérer $\mathbf{A}$ comme l'inverse à droite de $\mathbf{N}$ (car $\mathbf{NA} = \mathbf{I}$) et la conclusion indique que $\mathbf{A}$ est un inverse à gauche de $\mathbf{N}$ (car $\mathbf{AN} = \mathbf{I}$).

Démonstration. (Proposition 4.2) On montre que $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ a une solutions pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Ce n'est pas le cas si $\mathbf{A}$ n'a pas d'inverse à gauche. Nous en remettons la démonstration à la fin de la preuve. D'ici là, nous utilisons le résultat comme s'il étant déjà démontré.

Soit $\mathbf{y}$ un élément arbitraire de $\mathbb{K}^n$. D'après notre supposition, il existe $\mathbf{x}' \in \mathbb{K}^n$ tel que $\mathbf{Ax}' = \mathbf{y}$. La multiplication à gauche par $\mathbf{N}$ donne $\mathbf{N}(\mathbf{Ax}') = \mathbf{Ny}$, d'où $(\mathbf{NA})\mathbf{x}' = \mathbf{Ny}$. Puisque $\mathbf{NA} = \mathbf{I}$, nous devons avoir $\mathbf{x}' = \mathbf{Ny}$.

Ainsi, $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}' = \mathbf{A}(\mathbf{Ny}) = (\mathbf{AN})\mathbf{y}$. Puisque $\mathbf{y}$ est arbitraire, il s'ensuit que $\mathbf{D} = \mathbf{I}$.

Démontrons maintenant la supposition. S'il existe $\mathbf{y}' \in \mathbb{K}^n$ tel que $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}'$ n'admet aucune solution, la FER $\begin{bmatrix}\mathbf{R} & \mathbf{d}\end{bmatrix}$ de $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{y}'\end{bmatrix}$ contient une ligne qui ne contient que des valeurs nulles, sauf à la dernière colonne. Puisque $\mathbf{R}$ est une matrice carré, il y a alors (au moins) une colonne de $\mathbf{R}$ qui n'est pas une colonne pivot. Ainsi, il existe au moins une variable libre, ce qui implique l'existence d'un $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{K}^n$ non nul satisfaisant à $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$.

Mais

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{I}\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{NA})\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{N}(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{N0} = \mathbf{0},$$

ce qui contredit que $\tilde{\mathbf{x}}$ est non nul! L'hypothèse de l'existence d'un $\mathbf{y}' \in \mathbb{K}^n$ tel que $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}'$ n'admet aucune solution est donc fausse. □

Proposition 4.3. *Soient $\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Si $\mathbf{MA} = \mathbf{I}$ et $\mathbf{AN} = \mathbf{I}$, alors $\mathbf{M} = \mathbf{N}$.*

Autrement dit, si $\mathbf{M}$ et $\mathbf{N}$ sont des inverses à gauche et à droite d'une matrice carré $\mathbf{A}$, alors $\mathbf{M}$ et $\mathbf{N}$ doivent être la même matrice. La preuve est laissée en exercice.

Si $\mathbf{B}$ est une matrice telle que $\mathbf{BA} = \mathbf{AB} = \mathbf{I}$, alors $\mathbf{B}$ est la **matrice inverse** de $\mathbf{A}$. Si une matrice carré $\mathbf{A}$ a un inverse, $\mathbf{A}$ est dite **inversible.**

Il n'est pas difficile de montrer que si $\mathbf{A}$ est inversible, alors son inverse est unique; on le dénote par $\mathbf{A}^{-1}$.

Exemple 4.8. Soient $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Nous pouvons aisément vérifier que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, d'où $\mathbf{B}$ est la matrice inverse de $\mathbf{A}$ (et *vice versa*).

Exercices

1. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Supposons que $ad - bc \neq 0$. Vérifiez que $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.
2. Soient $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Calculez les produits $\mathbf{NA}$ et $\mathbf{AN}$. Est-ce que les réponses contredisent la proposition 4.2? Si non, pourquoi?
3. Démontrez la proposition 4.3.

Solutions

1. Notons que

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} da-bc & db-bd \\ -ca+ac & -cb+ad \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Il s'ensuit des proposition 4.2 et proposition 4.3 que $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ est l'inverse de $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

2. $\mathbf{NA} = \mathbf{I}_2$ et $\mathbf{AN} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Les réponses ne contredisent pas la proposition 4.2 car la proposition ne s'applique qu'aux matrices carrées.

3. La multiplication à la droite de chaque côté de $\mathbf{MA} = \mathbf{I}$ par $\mathbf{N}$ donne $(\mathbf{MA})\mathbf{N} = \mathbf{N}$. Mais

$$(\mathbf{MA})\mathbf{N} = \mathbf{M}(\mathbf{AN}) = \mathbf{MI} = \mathbf{M}.$$

   Ainsi, $\mathbf{M} = \mathbf{N}$.

4.8 Calcul de l'inverse d'une matrice carrée

Rappelons que si $\mathbf{E} \in \mathbb{K}^{m\times m}$ est une matrice élémentaire et si $\mathbf{B} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, alors $\mathbf{EB}$ est la matrice obtenue de $\mathbf{B}$ en appliquant les opérations élémentaires sur les lignes correspondant à la matrice $\mathbf{E}$.

Qu'en est-il de $\mathbf{E}^{-1}$? Son effet doit annuler l'effet de $\mathbf{E}$ à $\mathbf{B}$.

Si $\mathbf{E}$ correspond à l'opération élémentaire sur les lignes $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$, où $i \neq j$ et $\alpha \neq 0$, alors $\mathbf{E}^{-1}$ correspond à l'opération élémentaire sur les lignes $L_i \leftarrow L_i - \alpha L_j$. Par exemple, l'inverse de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$ est $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$.

Si $\mathbf{E}$ correspond à l'opération élémentaire sur les lignes $L_i \leftrightarrow L_j$, où $i \neq j$, alors $\mathbf{E}$ est son propre inverse. En effet, appliquer $L_i \leftrightarrow L_j$ deux fois de suite n'a aucun effet sur les lignes de $\mathbf{B}$. Par exemple, la matrice $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est son propre inverse.

Si $\mathbf{E}$ correspond à l'opération élémentaire sur les lignes $L_i \leftarrow \alpha L_i$, où $\alpha \neq 0$, alors $\mathbf{E}^{-1}$ correspond à l'opération élémentaire sur les lignes $L_i \leftarrow \alpha^{-1} L_i$. Par exemple, l'inverse de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ est $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$. Nous décrivons maintenant une façon d'obtenir $\mathbf{A}^{-1}$, si $\mathbf{A}$ est inversible, en utilisant la réduction.

Notons que l'on cherche une matrice $\mathbf{B} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ telle que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$. Autrement dit, nous cherchons à résoudre l'équation matricielle $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$. Ainsi, on obtient la matrice inverse $\mathbf{A}^{-1}$ en réduisant $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}$. Si la matrice résultante a la forme $\begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{B} \end{bmatrix}$, alors $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Sinon, $\mathbf{A}$ n'est pas inversible, comme nous le verrons plus tard.

À titre d'illustration, considérons $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. L'inverse de $\mathbf{A}$ est une matrice $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$ telle que $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

La matrice $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$ se réduit à

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{array}\right].$$

Puisque les deux premières colonnes de cette matrice forment la matrice identité, on obtient $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$.

Exemple 4.9. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ donnée par $\begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Afin de calculer $\mathbf{A}^{-1}$, nous réduisons $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$ comme suit :

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2} & \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \\ \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + (-i)L_2} & \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}i \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2}i \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Exercices

1. Déterminez si chacune des matrices suivantes est inversible. Si oui, déterminez son inverse.
   a. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$
   b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
   c. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
2. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ une matrice à éléments dans $GF(2)$. Déterminez l'inverse de $\mathbf{A}$.

Solutions

1. a. $\begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   c. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. En réduisant la matrice, on obtient $\left[\begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{I}_3 \end{array}\right]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Ainsi, l'inverse de $\mathbf{A}$ est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

4.9 L'inverse d'un produit de matrices

Proposition 4.4. *Soient $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{K}^{n\times n}$, où $\mathbb{K}$ est un corps et n est un entier positif. Soit $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$. Alors, $\mathbf{C}$ est inversible si et seulement si $\mathbf{AB}$ est inversible.*

Démonstration. Nous montrons la suffisance. La nécéssité est laissée en exercice.

Supposons que $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ soient toutes deux inversibles. Posons $\mathbf{D} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbf{DC} &= (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB})\\ &= \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB}))\\ &= \mathbf{B}^{-1}((\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B})\\ &= \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{I}_n\mathbf{B}) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\\ &= \mathbf{I}_n.\end{aligned}$$

De façon similaire, on peut vérifier que

$$\mathbf{CD} = \mathbf{I}_n.$$

Ainsi, $\mathbf{C}$ est inversible. □

Plus généralement, si $\mathbf{A}^{(1)}, \ldots, \mathbf{A}^{(k)} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sont des matrices inversibles, alors $(\mathbf{A}^{(1)}\cdots\mathbf{A}^{(k)})^{-1} = {\mathbf{A}^{(k)}}^{-1}\cdots{\mathbf{A}^{(1)}}^{-1}$.

Exemple 4.10. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. Alors, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$. De plus,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{-1} &= \begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}^{-1}\\ &= \begin{bmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}$.

Les matrices obtenues ci-dessus sont aisées à obtenir puisqu'elles sont les inverses de matrices élémentaires.

4.9.1 Comment générer des matrices inversibles

Supposons que l'on nous demande de trouver quelques matrices inversibles 3×3 dont les inverses ne sons pas évidentes à trouver. Que ferions-nous?

Nous pourrions consulter des livres ou Internet, ou encore écrire quelques matrices 3×3 et utiliser la rédaction afin de trouver l'inverse de ces matrices, comme à la section précédente. Cependant, ces méthodes ne sont guère efficaces.

Le résultat clef nous permettent de générer une telle matrice inversible arbitraire est le suivant.

Proposition 4.5. *Une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$, où $\mathbb{K}$ est un corps et n est un entier positif, est inversible si et seulement si $\mathbf{A}$ est le produit de matrices élémentaires de $\mathbb{K}^{n\times n}$.*

Par exemple, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ est inversible et peut s'écrire sous la forme $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ est la matrice élémentaire correspondant à l'opération élémentaire sur les lignes $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$. La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$ est la matrice élémentaire correspondant à l'opération élémentaire sur les lignes $L_2 \leftarrow -7L_2$. La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ est la matrice élémentaire correspondant à l'opération élémentaire sur les lignes $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$.

Avec le résultat précédant, il est possible de générer une matrice inversible arbitraire en commençant simplement avec une matrice élémentaire et en appliquant une suite arbitraire d'opérations élémentaires sur les lignes puisque la multiplication (à gauche) par des matrices élémentaires à le même effet que la d'opérations élémentaires sur les lignes correspondantes.

Démonstration. (Proposition 4.5) Rappelons que les matrices élémentaires sont inversibles et que le produit de matrices inversible est aussi inversible. Ainsi, si $\mathbf{A}$ est le produit de matrices élémentaires, $\mathbf{A}$ est inversible.

Nous montrons maitenant que si $\mathbf{A}$ est inversible, alors on peut l'écrire en tant que produit de matrices élémentaires. Rappelons que si $\mathbf{A}$ est inversible, alors la FER de la matrice $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$ est $\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix}$. Ainsi, il existe des matrices élémentaires $\mathbf{M}^{(1)}, \ldots, \mathbf{M}^{(k)}$ telles que

$$\mathbf{M}^{(k)} \cdots \mathbf{M}^{(1)} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix},$$

ou de façon équivalente,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{(k)} \cdots \mathbf{M}^{(1)}\mathbf{A} & \mathbf{M}^{(k)} \cdots \mathbf{M}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix}.$$

La comparaison des colonnes de la moitié droite de chaque côtés nous permet d'obtenir

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{M}^{(k)} \cdots \mathbf{M}^{(1)}.$$

Ainsi,

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = (\mathbf{M}^{(k)} \cdots \mathbf{M}^{(1)})^{-1} = {\mathbf{M}^{(1)}}^{-1} \cdots {\mathbf{M}^{(k)}}^{-1},$$

qui est un produit de matrices élémentaires. □

Exemple 4.11. Décomposons $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ en tant que produit de matrices élémentaires.

La discussion précédente suggère de réduire $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$ en en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes. Mais nous n'avons pas à travailler avec la matrice $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$. Il suffit de connaître la suite des opérations élémentaires transformant $\mathbf{A}$ en $\mathbf{I}$.

Notons que

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} &\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2} L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Exercices

1. Déterminez l'inverse de chacun des produits suivants.

   a. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Décomposez chacune des matrices suivantes en tant que produit de matrices élémentaires.

a. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. Soient $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{K}^{n \times n}$, où $\mathbb{K}$ est un corps. Démontrez que si $\mathbf{AB}$ est inversible, alors $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont inversibles.

Solutions

1. a. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

2. a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. Posons $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$. Puisque $\mathbf{C}$ est inversible, il existe $\mathbf{D} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ telle que $\mathbf{DC} = \mathbf{CD} = \mathbf{I}_n$. Ainsi,

$$\mathbf{DAB} = \mathbf{I}_n$$
$$\mathbf{ABD} = \mathbf{I}_n,$$

   ce qui implique

$$(\mathbf{DA})\mathbf{B} = \mathbf{I}_n$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{BD}) = \mathbf{I}_n.$$

   Ainsi, $\mathbf{DA}$ est l'inverse à gauche de $\mathbf{B}$ et $\mathbf{BD}$ est l'inverse à droite de $\mathbf{A}$. D'après la proposition 4.2, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ ont donc un inverse à droite et un inverse à gauche, respectivement. Ainsi, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont toutes les deux inversibles.

4.10 Matrices singulières

Rappelons qu'une matrice carrée ayant un inverse est dite inversible. Ce ne sont pas toutes les matrices carrées à éléments dans un corps donné qui sont inversible. On dit d'une telle matrice qu'elle est **non inversible**.

Par exemple, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est non inversible puisque $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$ pour chaque $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, d'où $\mathbf{BA} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ peu importe les valeurs de a, b, c et d.

Il existe une façon de vérifier si une matrice est inversible sans avoir à trouver l'inverse de cette matrice (s'il existe) : Une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\mathbb{K}$ un corps, est inversible si et seulement s'il n'existe pas de $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ non nul, tel que $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

Notons que l'existence d'un tel $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ ne requiert de condition au sujet de la taille de $\mathbf{A}$ et de l'ensemble d'où proviennent les éléments de $\mathbf{A}$ et de $\mathbf{x}$. On dit qu'une matrice $\mathbf{A}$ est **singulière** s'il existe $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, tel que $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

Une matrice qui n'est pas singulière est **non singulière**. Pour les matrices carrés à éléments dans un corps, les notions de matrices singulières et de matrices non inversibles sont équivalentes.

4.10.1 Tester la singularité

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $\mathbb{K}$ un corps. Rappelons que $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ admet toujours la **solution triviale** (l'uplet dont toutes les composantes sont nulles). Toutes les autres solutions sont dites **non triviales**.

Si une solution non triviale de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ ne se trouve pas immédiatement, nous pouvons déterminer si une solution existe en réduisant $\mathbf{A}$ en FER en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes. Le système admet une solution non triviale si et seulement si la FER de $\mathbf{A}$ possède au moins une colonne libre.

Exemple 4.12. La matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ est singulière car $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ est une solution non triviale du système $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

Exemple 4.13. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ définie sur $GF(2)$. On applique les des opérations

élémentaires $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ et (ensuite) $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ d'obtenir $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Puisque la troisième colonne est une colonne libre, $\mathbf{A}$ est singulière. En particulier, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ satisfait à $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

4.10.2 Pourquoi les matrices carrées singulières ne sont-elles pas inversible?

Soit $\mathbf{A}$ une matrice carrée à éléments dans un corps $\mathbb{K}$. Supposons que $\mathbf{x}$ soit une solution non triviale de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Si $\mathbf{A}^{-1}$ existe, alors $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{0}$, ce qui implique que $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Mais $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Ainsi, $\mathbf{Ix} = \mathbf{0}$, ce qui contredit $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Les matrices inversibles sont certainement non singulières car si $\mathbf{x}$ est tel que $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, alors

$$\mathbf{x} = \mathbf{Ix} = (\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Ainsi, la solution triviale est la seule solution de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

Grâce à l'observation précédente, nous pouvons comprendre pourquoi la réduction de $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$, où $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$, détermine si $\mathbf{A}$ est inversible en nous donnant $\mathbf{A}^{-1}$ de droite lorsque c'est le cas. S'il y a une colonne libre dans les premières n colonnes de la FER de $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$, alors que $\mathbf{A}$ est singulière et donc non inversible. Sinon, la matrice réduite prend la forme $\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$ et, comme nous l'avons vu précédemment, $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

Exercices

1. Déterminez si les matrices suivantes sont singulières.

   a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

Solutions

1. a. Singulière.

   b. Non singulière.

4.11 Propriétés des matrices

Dans cette section, S dénote un ensemble sur lequel l'addition et la multiplication sont définies, associatives, et commutatives.

4.11.1 Addition de matrices

Soient $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in S^{m\times n}$. Alors, $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ est la matrice $\mathbf{C} \in m \times n$ telle que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, pour $i = 1, \ldots, m$ et $j = 1, \ldots, n$.

Exemple 4.14.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 2+0 & 3+(-1) \\ 4+2 & 5+(-2) & 6+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Soient $\mathbf{A} \in S^{m\times m}$, $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \in S^{m\times n}$, et $\mathbf{E} \in S^{n\times n}$. Alors, les propriétés suivantes sont satisfaites :

— $\mathbf{B} + (\mathbf{C} + \mathbf{D}) = (\mathbf{B} + \mathbf{C}) + \mathbf{D}$
— $\mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{C} + \mathbf{B}$
— $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
— $(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{E} = \mathbf{BE} + \mathbf{CE}$

4.11.2 Multiplication par un scalaire

Si $\alpha \in S$ et $\mathbf{A}$ est une matrice, alors $\alpha\mathbf{A}$ est la matrice obtenue de $\mathbf{A}$ en multipliant chaque élément par α.

Exemple 4.15.

$$(-2)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$$

Exemple 4.16.

$$(1+i)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ -1+i & 2+2i \end{bmatrix}$$

On définit $-\mathbf{A}$ par $(-1)\mathbf{A}$ et la soustraction de matrices comme suit : $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-1)\mathbf{B}$.

Soient $\alpha, \beta \in S$. $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ des matrices $m \times n$ et $\mathbf{C}$ une matrice $p \times m$. Les propriétés suivantes sont satisfaites :

— $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$
— $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$

— $\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$
— $\mathbf{C}(\alpha\mathbf{A}) = (\alpha\mathbf{C})\mathbf{A} = \alpha(\mathbf{CA})$

4.11.3 La transposée d'une matrice

La **transposée** d'une matrice $\mathbf{A} \in S^{m\times n}$, que l'on dénote par $\mathbf{A}^\mathsf{T}$, est la matrice $n \times m$ telle que l'élément (j, i) est donné par $a_{i,j}$ pour $i = 1, \ldots, m$ et $j = 1, \ldots, n$. Autrement dit, la i-ième colonne de $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ vient de la i-ième ligne de $\mathbf{A}$.

Exemple 4.17. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$. Alors $\mathbf{A}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

Exemple 4.18. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$. Alors $\mathbf{A}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Les propriétés suivantes sont satisfaites :

— $(\mathbf{A}^\mathsf{T})^\mathsf{T} = \mathbf{A}$
— Si λ est un scalaire, alors $(\lambda\mathbf{A})^\mathsf{T} = \lambda\mathbf{A}^\mathsf{T}$
— $(\mathbf{A}^{-1})^\mathsf{T} = (\mathbf{A}^\mathsf{T})^{-1}$
— $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\mathsf{T} = \mathbf{A}^\mathsf{T} + \mathbf{B}^\mathsf{T}$ pour tout $\mathbf{B}$ de même taille que $\mathbf{A}$
— Si $\mathbf{A} \in S^{m\times p}$ et $\mathbf{B} \in \mathbf{B} \in S^{p\times n}$, alors $(\mathbf{AB})^\mathsf{T} = \mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}$.

4.11.4 Puissance d'une matrice

Soient $\mathbf{A} \in S^{n\times n}$ et k un entier naturel. On défini

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n$$

et

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{A}\mathbf{A}^{k-1},$$

lorsque $k > 1$.

De cette définition, on voit immédiatement que $\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}\mathbf{A}^0 = \mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}\mathbf{A}$.

Exemple 4.19.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}^3 &= \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}^2 && (4.1)\\
&= \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\right) && (4.2)\\
&= \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 0 & 4\end{bmatrix} && (4.3)\\
&= \begin{bmatrix}1 & -7\\ 0 & 8\end{bmatrix} && (4.4)
\end{aligned}$$

Si S est un corps et $\mathbf{A}$ est inversible, alors $\mathbf{A}^k$ l'est également et $\left(\mathbf{A}^k\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^k$. On écrit $\mathbf{A}^{-k}$ au lieu de $\left(\mathbf{A}^k\right)^{-1}$.

Le calcul de puissances de matrices ne s'effectue pas aussi facilement que le calcul de puissances de nombres. Cependant, quelques cas existent où la puissance d'une matrice se calcule relativement aisément.

Exercices

1. Exprimez chacune des matrices suivantes sous un forme aussi simple que possible.
   a. $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$
   b. $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$
   c. $\begin{bmatrix}7 & 2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}^\mathsf{T}$
   d. $\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\ 5 & 6\end{bmatrix}^\mathsf{T} + 2\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)^\mathsf{T}$
2. Calculez chacune des puissances des matrices suivantes.
   a. $\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}^3$
   b. $\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}^6$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}^{-2}$

Solutions

1. a. $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

   c. $\begin{bmatrix} 4 & -2 \end{bmatrix}$

   d. $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$

2. a. $\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 729 \end{bmatrix}$ or $\begin{bmatrix} 2^6 & 0 \\ 0 & 3^6 \end{bmatrix}$

   c. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

4.12 Exemple de test portant sur la matière de ce chapitre

1. Trouvez une matrice $\mathbf{A}$ telle que
$$\begin{bmatrix} u+v-w \\ 2u+w \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}.$$
2. Calculez le produit $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.
3. Soient $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Trouvez une matrice $\mathbf{M}$ telle que $\mathbf{MA} = \mathbf{B}$.
4. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Trouvez toutes les solutions des systèmes $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}^{(i)}$ pour $i = 1, 2, 3$, où $\mathbf{e}^{(i)}$ dénote la i-ième colonne de $\mathbf{I}_3$.
5. Déterminez la matrice inverse de $\begin{bmatrix} -i & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$.
6. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ définie sur $GF(2)$. Déterminez $\mathbf{A}^{-1}$.
7. Montrez que $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ est singulière.
8. Simplifiez l'expression suivante : $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^3 \right)^{\mathsf{T}}$.
9. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Démontrez que $\mathbf{A}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.
10. Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soient $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Démontrez que $(\lambda\mathbf{A})^{\mathsf{T}} = \lambda\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$.

Solutions

1. Notons d'abord que $\mathbf{A}$ doit être de taille 2×3. La première colonne de $\mathbf{A}$ doit contenir les coefficients de u, la deuxième colonne les coefficients de v, et la dernière les coefficients de w. Ainsi, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Notons que

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \\ (-1) \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 & (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 10 \\ -4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3. En appliquant $L_2 \leftarrow 3L_2$ à $\mathbf{A}$, on obtient $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 9 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. En appliquant $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, on obtient $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Cette matrice est précisément $\mathbf{B}$.

   Les matrices élémentaires correspondantes à la première opération et à la deuxième opération sont, respectivement, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

   et on observe aisément que $\mathbf{MA} = \mathbf{B}$.

   Remarque. Observons que l'on peut obtenir $\mathbf{M}$ en appliquant la même suite d'opérations élémentaires sur les lignes de $\mathbf{I}_3$, en raison du fait que chaque multiplication

(à gauche) par une matrice élémentaire a la même effect que l'opération élémentaire sur les lignes associée avec cette matrice. Notons que cela réduit grandement les calculs lorsque le nombre d'opérations élémentaires sur les lignes est élevé.

4. La matrice augmentée généralisée capturant les trois systèmes est

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

L'application de $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donne

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

L'application de $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$ donne

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

L'application de $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$ donne

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

L'application de $L_2 \leftrightarrow L_3$ donne

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right].$$

Ainsi, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ est l'unique solution de $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}^{(1)}$, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ est l'unique solution de $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}^{(2)}$, et $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ est l'unique solution de $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}^{(3)}$.

5. Nous appliquons la réduction à $\left[\begin{array}{cc|cc} -i & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, afin d'obtenir

$$\begin{aligned}
&\left[\begin{array}{cc|cc} -i & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
\xrightarrow{L_1 \leftarrow iL_1} &\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & i & i & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} &\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & i & i & 0 \\ 0 & -2i & -2i & 1 \end{array}\right] \\
\xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{i}{2} L_1} &\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & i & i & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{i}{2} \end{array}\right] \\
\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - iL_2} &\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{i}{2} \end{array}\right]
\end{aligned}$$

La matrice inverse est $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{i}{2} \end{bmatrix}$.

6. Nous appliquons la réduction à $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, afin d'obtenir

$$\begin{aligned}
&\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} &\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} &\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \\
\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} &\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \\
\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_3} &\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]
\end{aligned}$$

Donc, $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

7. Nous devons trouver un 3-uplet $\mathbf{x}$ tel que $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Pour ce faire, il suffit de réduire $\mathbf{A}$:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow 2L_2} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{4}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ satisfait à $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, ce qui implique que $\mathbf{A}$ est singulière puisque $\mathbf{x}$ est une solution non triviale.

8. Notons que

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}^3\right)^{\mathsf{T}}\\
&= \left(\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & -2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}^3\right)^{\mathsf{T}}\\
&= \left(\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & -2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}^2\right)^{\mathsf{T}}\\
&= \left(\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & -2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}2 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}\right)\right)^{\mathsf{T}}\\
&= \left(\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & -2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -3\\0 & 1\end{bmatrix}\right)^{\mathsf{T}}\\
&= \left(\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & -2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}8 & -7\\0 & 1\end{bmatrix}\right)^{\mathsf{T}}\\
&= \begin{bmatrix}-7 & 6\\2 & -3\end{bmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix}-7 & 2\\6 & -3\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

9. Montrons d'abord que si $ad - bc = 0$, alors $\mathbf{A}$ est singulière et donc non inversible.

   Si $a = c = 0$, alors $\mathbf{A}$ est évidemment singulière puisque $\mathbf{A}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$.

   Supposons d'abord que a et c ne sont pas tous deux nuls. Alors au moins un uplet parmi $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}d\\-c\end{bmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}b\\-a\end{bmatrix}$ n'est pas égale à $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$. Mais $\mathbf{Au} = \begin{bmatrix}ad-bc\\cd-dc\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ et $\mathbf{Av} = \begin{bmatrix}ab-ba\\cb-da\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$. Ainsi, $\mathbf{A}$ est singulière et non inversible.

   Montrons maintenant que si $ad - bc \neq 0$, alors $\mathbf{A}$ est inversible. Supposons que $a \neq 0$. Alors la réduction suivante est valide :

$$\begin{aligned}
&\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0\\ c & d & 0 & 1\end{array}\right]\\
\xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{a}L_1}\ &\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0\\ c & d & 0 & 1\end{array}\right]\\
\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - cL_1}\ &\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0\\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1\end{array}\right]\\
\xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{a}{ad-bc}L_2}\ &\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc}\end{array}\right]
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbf{A}$ est inversible.

Supposons maintenant que $a = 0$. Puisque $ad - bc \neq 0$, on doit avoir $c \neq 0$. Les détails sont semblables au cas précédant et sont laissés en exercice.

Remarque. La solution présentée ici est longue et non intuitive. Nous verrons plus tard que l'on obtient une démonstration en utilisant le déterminant.

10. Soit $\mathbf{B} = \lambda\mathbf{A}$. Montrons que $\mathbf{B}^\mathsf{T} = \lambda\mathbf{A}^\mathsf{T}$.

Notons que l'élément (i, j) de $\mathbf{B}$ est λa_{ij}. Ainsi, l'élément (i, j) de $\mathbf{B}^\mathsf{T}$ est l'élément (j, i) de $\mathbf{B}$ et est donc λa_{ji}.

Mais l'élément (i, j) de $\lambda\mathbf{A}^\mathsf{T}$ est lui-même le λ-multiple de l'élément (i, j) de $\mathbf{A}^\mathsf{T}$, qui se retrouve également à être λa_{ji}. Ainsi, $\mathbf{B}^\mathsf{T} = \lambda\mathbf{A}^\mathsf{T}$.

Chapitre 5

Déterminant

Ce chapitre introduit le déterminant d'une matrice carrée. On présente quelques méthodes afin de le calculer. La maîtrise du matériel de ce chapitre permet de :

— Définir une permutation et une inversion.
— Définir le déterminant d'une matrice carrée.
— Rapidement trouver le déterminant de matrices spéciales.
— Calculer le déterminant en utilisant une variété de méthodes.
— Énoncer des propriétés du déterminant.
— Énoncer et appliquer la règle de Cramer.

Les connaissances requises pour ce chapitre incluent l'algèbre matricielle et la résolution de systèmes d'équations linéaires.

Les preuves techniques pour certaines des propriétés du déterminant sont omises car elles n'ajoutent pas grand chose à l'apprentissage de l'algèbre linéaire.

5.1 Permutations

Pour définir le déterminant d'une matrice carrée, nous devons commencer par introduire les permutations.

Une **permutation** est une bijection $\sigma : S \to S$, où S est un ensemble. Nous dénotons généralement une permutation sous la forme d'un tableau à deux rangées de sorte que chaque élément de la rangée du bas représente l'image de l'élément qui se retrouve immédiatement au-dessus. En utilisant cette notation, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est une permutation telle que $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 1$, et $\sigma(3) = 2$. (La notation pour les permutations ne doit pas être confondue avec celle des matrices.)

L'ensemble de toutes les permutations de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ est dénoté par S_n. Notons que $|S_n| = n!$. Les éléments de S_2 sont $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, et ceux de S_3 sont $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

La permutation $\sigma \in S_n$ telle que $\sigma(i) = i$ pour $i = 1, \ldots, n$ est la permutation **identité**.

Soient $\sigma, \gamma \in S_n$. Il n'est pas difficile de voir que $\gamma \circ \sigma \in S_n$.

Exemple 5.1. Soient $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Que donne $\gamma \circ \sigma$?

Notons que

$$\begin{aligned}(\gamma \circ \sigma)(1) &= \gamma(\sigma(1)) = \gamma(3) = 1,\\ (\gamma \circ \sigma)(2) &= \gamma(\sigma(2)) = \gamma(1) = 3,\\ (\gamma \circ \sigma)(3) &= \gamma(\sigma(3)) = \gamma(2) = 2.\end{aligned}$$

Ainsi, $\gamma \circ \sigma$ est la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Si $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, alors $\gamma \circ \sigma$ est la permutation identité. (Vérifiez!) On appelle γ **permutation inverse** (ou simplement l'inverse) de σ. Chaque permutation a un inverse.

Nous verrons plus tard que la définition du déterminant d'une matrice $\mathbf{A}$ de taille $n \times n$ est une somme de termes, chacun contenant un produit de la forme $a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$, pour une permutation $\sigma \in S_n$, où $a_{i,j}$ dénote l'élément (i, j) de $\mathbf{A}$.

Rappelons que l'on utilise le premier indice pour les lignes et le second pour les colonnes. Ainsi, le produit $a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$ contient exactement un élément de chacune des lignes de $\mathbf{A}$. Puisque $\sigma(1), \ldots, \sigma(n)$ est une permutation des nombres $1, \ldots, n$, le produit $a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$ contient aussi exactement un élément de chacune des colonnes de $\mathbf{A}$.

Exemple 5.2. Soient $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ u & v & w \end{bmatrix}$ et $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Alors

$$a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} a_{3,\sigma(3)} = a_{1,3} a_{2,1} a_{3,2} = cdv.$$

Exercices

1. Pour chacune des permutations suivantes, donnez la permutation inverse.

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & 7 & 4 \end{bmatrix}$. Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Quel valeur prend $a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}a_{3,\sigma(3)}$?

Solutions

1. a. La permutation inverse est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

   b. La permutation inverse est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   c. La permutation inverse est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}a_{3,\sigma(3)} = a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} = 3 \cdot 1 \cdot (-5) = -15.$

5.2 Définition

Avant d'aborder le déterminant, nous devons aussi introduire la notion d'inversion d'une permutation.

Soit $\sigma \in S_n$. La paire (i, j) est une **inversion** de σ si $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. (À ne pas confondre avec la permutation inverse discuté au préalable.)

Le nombre total d'inversions de σ est dénoté par $\mathrm{inv}(\sigma)$.

Exemple 5.3. Considérons $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. La paire $(1, 2)$ est une inversion de σ car on a $1 < 2$ et $\sigma(1) = 3 > 1 = \sigma(2)$. L'autre inversion est donnée par la paire $(1, 3)$. Donc $\mathrm{inv}(\sigma) = 2$.

Exemple 5.4. Soit $\sigma \in S_n$ pour laquelle éxiste $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i < j$ tels que $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$, et $\sigma(k) = k$ pour tout les autres indices. Nous voulons déterminer $\mathrm{inv}(\sigma)$.

Notons que pour chaque $k = i + 1, \ldots, j - 1$, (i, k) est une inversion car $i < k$ et $\sigma(i) = j > k = \sigma(k)$.

De plus, pour chaque $k = i + 1, \ldots, j - 1$, (k, j) est une inversion car $k < j$ et $\sigma(k) = k > i = \sigma(j)$.

Finalement, la paire (i, j) est également une inversion. Ainsi,

$$\mathrm{inv}(\sigma) = 2(j - 1 - (i + 1) + 1) + 1 = 2(j - i) - 1,$$

qui est toujours impair.

Par exemple, les inversions de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ sont $(2, 3)$, $(3, 4)$ et $(2, 4)$.

Pour $\mathbf{A} \in S^{n \times n}$, S un anneau, le **déterminant** de $\mathbf{A}$, dénoté par $\det(\mathbf{A})$, est défini par

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)},$$

où $a_{i,j}$ dénote l'élément de la i-ième ligne et de la j-ième colonne de $\mathbf{A}$.

Le calcul du déterminant tel que défini requiert la somme de $n!$ termes. Chacun de ces termes dépend d'une permutation de S_n et du produit de n éléments de $\mathbf{A}$, et le signe dépend de la parité du nombre d'inversion de la permutation. (La parité d'un entier relatif nous indique si le nombre est pair ou impair.)

Notons que même lorsque la taille de la matrice est petite, le nombre de termes à calculer devient rapidement trop élevé. Par exemple, si $n = 5$, il y a déjà $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ termes. Fort heureusement, il existe des méthodes efficaces de calcul de déterminant qui ne demandent pas autant de termes.

5.2.1 Déterminant de matrices de petite taille

Dans le cas des matrices de taille 2×2 ou 3×3, il y a des formules permettant de simplifier les calculs.

Soient $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Les deux permutations de S_2 sont $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Puisque $\mathsf{inv}(\sigma_1) = 0$ et $\mathsf{inv}(\sigma_2) = 1$, nous avons

$$\det(\mathbf{A}) = (-1)^{\mathsf{inv}(\sigma_1)} a_{1,\sigma_1(1)} a_{2,\sigma_1(2)} + (-1)^{\mathsf{inv}(\sigma_2)} a_{1,\sigma_2(1)} a_{2,\sigma_2(2)} = ad - bc.$$

Soient $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix}$. Les six permutations de S_3 sont énumérées dans le tableau suivant.

i	1	2	3
σ_i	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
$\mathsf{inv}(\sigma_i)$	0	1	1
$(-1)^{\mathsf{inv}(\sigma_i)}$	1	-1	-1

i	4	5	6
σ_i	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathsf{inv}(\sigma_i)$	2	2	3
$(-1)^{\mathsf{inv}(\sigma_i)}$	1	1	-1

Alors

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{i=1}^{6} (-1)^{\mathsf{inv}(\sigma_i)} a_{1,\sigma_i(1)} a_{2,\sigma_i(2)} a_{3,\sigma_i(3)} \\ &= p_1q_2r_3 - p_1q_3r_2 - p_2q_1r_3 + p_2q_3r_1 + p_3q_1r_2 - p_3q_2r_1. \end{aligned}$$

5.2.2 Convention d'écriture

Au lieu d'écrire $\det\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{bmatrix}\right)$, on écrit simplement $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix}$.

Exercices

1. Pour chacune des permutations suivantes, donnez le nombre d'inversions.
   a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
   b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
   c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
2. Calculez le déterminant de chacune des matrices suivantes :
   a. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
   b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{bmatrix}$
   c. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & p \\ q & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \end{bmatrix}$
3. Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ des matrices de taille $n \times n$ telles que $\mathbf{B}$ est obtenue de $\mathbf{A}$ en multipliant une ligne de $\mathbf{A}$ par le scalaire α. Démontrez que $\det(\mathbf{B}) = \alpha \det(\mathbf{A})$.

Solutions

1. a. Le nombre d'inversions est 1.

   b. Le nombre d'inversions est 6.

   c. Le nombre d'inversions est 6.

2. a. 1

   b. $ad - bc$

   c. pqr

3. Supposons que $\mathbf{B}$ soit obtenue de $\mathbf{A}$ en multipliant la i-ième ligne par α. Alors

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{B}) &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathsf{inv}(\sigma)} \prod_{p=1}^{n} b_{p,\sigma(p)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathsf{inv}(\sigma)} \left(\prod_{p \neq i} a_{p,\sigma(p)} \right) \left(\alpha a_{i,\sigma(i)} \right) \\
&= \alpha \left(\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathsf{inv}(\sigma)} \prod_{p=1}^{n} a_{p,\sigma(p)} \right) \\
&= \alpha \det(\mathbf{A}).
\end{aligned}$$

5.3 Matrices spéciales

5.3.1 Matrices ayant une ligne ou une colonne nulle

Soit $\mathbf{A}$ une matrice carré ayant une ligne ou une colonne nulle. Alors $\det(\mathbf{A}) = 0$. En effet, notons que chaque terme de la définition de $\det(\mathbf{A})$ est une produit de la forme $a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}$, pour une permutation σ. Ainsi, chaque terme contient exactement un élément de chaque ligne et de chaque colonne de $\mathbf{A}$, ce qui implique que chaque terme est nul, ce qui implique que $\det(\mathbf{A}) = 0$.

5.3.2 Matrices de permutations

Une matrice de permutation de taille $n \times n$ est une matrice obtenue de la matrice identité $\mathbf{I}_n$ en permutant ses lignes. Par exemple, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ est une matrice de permutation.

Comme son nom le suggère, une telle matrice permet d'encoder directement une permutation de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. L'interprétation est la suivante : si σ est encodée par la matrice de permutation, alors $\sigma(i)$ est l'indice de la colonne de l'élément contenant 1 à la i-ième ligne. Dans l'exemple ci-dessus, la permutation correspondante est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ car dans la ligne 1, la colonne 2 contient 1; dans la ligne 2, la colonne 4 contient 1; dans la ligne 3, la colonne 1 contient 1; dans la ligne 4, la colonne 3 contient 1.

Pour une matrice de permutation $\mathbf{P}$ donnée qui encode σ, le déterminant de $\mathbf{P}$ est tout simplement $(-1)^{\mathsf{inv}(\sigma)}$. À l'exemple ci-dessus, il y a trois inversions. Donc, le déterminant est $(-1)^3 = -1$.

Ce résultat se voit directement à partir de la définition du déterminant : chaque terme de la somme contient un facteur $(-1)^{\mathsf{inv}(\sigma')}$ qui multiplie le produit de n éléments d'exactement un élément de chaque ligne et un élément de chaque colonne. La seule façon d'obtenir un terme non nul est d'utiliser une permutation qui extrait l'élément non nul de chaque ligne. Il n'y a qu'une permutation pour laquelle c'est le cas, celle qui est encodée par σ.

5.3.3 Matrices triangulaires

Soit $\mathbf{A}$ une matrice carrée triangulaire supérieure (c'est-à-dire que $a_{i,j} = 0$ pour tout $i > j$). Par exemple, la matrice $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & \mathbf{7} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ est triangulaire supérieure.

Dans ce cas, $\det(\mathbf{A})$ est le produit des éléments sur la diagonale. Ici, le déterminant est $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$.

Voyons pourquoi c'est le cas. Soit $\sigma \in S_n$. On commence par montrer que si σ n'est pas la permutation identité, alors $\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = 0$.

Supposons que $\sigma(1) \neq 1$. Alors il doit y avoir un $i \geq 2$ tel que $\sigma(i) = 1$. Ceci donne $a_{i,\sigma(i)} = 0$ puisque $\mathbf{A}$ est triangulaire supérieure et $i > \sigma(i)$. Donc, $\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = 0$ si $\sigma(1) \neq 1$.

Supposons que $\sigma(1) = 1$ mais $\sigma(2) \neq 2$. Alors il doit y avoir un $i \neq 2$ tel que $\sigma(i) = 2$. Mais $i \neq 1$ puisque nous avons déjà $\sigma(1) = 1$. Donc, $i \geq 3$. Ceci donne encore $a_{i,\sigma(i)} = 0$, puisque $i > \sigma(i)$. Donc, $\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = 0$ si $\sigma(1) = 1$ et $\sigma(2) \neq 2$.

Nous pouvons continuer de cette manière pour montrer que si $\sigma(i) = i$ et $\sigma(i+1) \neq i+1$, alors $\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = 0$. Ainsi, le seul terme de $\det(\mathbf{A})$ qui être non nul est celui pour lequel $\sigma(i) = i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, ce qui implique que $\det(\mathbf{A}) = a_{1,1}a_{2,2} \cdots a_{n,n}$.

En utilisant un argument semblable, on peut conclure que le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure (une matrice où tous les éléments au-dessous de la diagonale sont nuls) est aussi donné par le produit des éléments sur la diagonale.

Exercices

1. Calculez le déterminant de chacune des matrices suivantes :
   a. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
   b. $\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 2-i & 0 \\ 3 & 1+i \end{bmatrix}$

Solutions

1. a. 4

   b. adf

   c. $(2-i)(1+i) = 3+i$

5.4 Propriétés fondamentales

Proposition 5.1. *Soient* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in S^{n\times n}$, S *un anneau. Alors*

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}).$$

La démonstration de cette proposition est technique et nous l'omettons.

Une conséquence immédiate et utile du proposition 5.1 est que

$$\det(\mathbf{A}^k) = \det(\mathbf{A})^k$$

pour tout entier naturel k.

Exemple 5.5. Soient $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ telles que $\det(\mathbf{A}) = 3$ et $\det(\mathbf{B}) = -2$. Alors $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}) = -6$.

Exemple 5.6. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Alors $\det(\mathbf{A}^{100}) = \det(\mathbf{A})^{100} = (-1)^{100} = 1$.

Le déterminant satisfait aussi aux propriétés suivantes :

- Si $\mathbf{B}$ est obtenue de $\mathbf{A}$ en ajoutant un multiple d'une ligne de $\mathbf{A}$ à une autre ligne de $\mathbf{A}$, alors $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})$.
- Si $\mathbf{B}$ est obtenue de $\mathbf{A}$ en échangeant deux lignes de $\mathbf{A}$, alors $\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A})$.
- $\det(\mathbf{A}^\mathsf{T}) = \det(\mathbf{A})$.
- Si $\mathbf{A}$ est inversible, alors $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A})^{-1}$.
- Si α est un scalaire et $\mathbf{A}$ est de taille $n \times n$, $\det(\alpha\mathbf{A}) = \alpha^n \det(\mathbf{A})$.

Exemple 5.7. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Notons que $\det(\mathbf{A}) = 3$.

- $\det(\mathbf{A}^\mathsf{T}) = \det(\mathbf{A}) = 3$.
- Notons que $\mathbf{A}$ est inversible. Donc, $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} = \frac{1}{3}$.
- $\det(2\mathbf{A}) = 2^2 \det(\mathbf{A}) = 4 \cdot 3 = 12$ puisque $\mathbf{A}$ est 2×2.
- $\det(-\mathbf{A}) = \det((-1)\mathbf{A}) = (-1)^2 \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) = 3$. Notons que dans ce cas, $\det(-\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$.

Proposition 5.2. *Soit* $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\mathbb{K}$ *un corps. Alors* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ *si et seulement si* $\mathbf{A}$ *est non singulière.*

Démonstration. Soit $\mathbf{R}$ la FER de $\mathbf{A}$. Alors il existe des matrices élémentaires $\mathbf{M}^{(1)}, \ldots, \mathbf{M}^{(k)}$ telles que $\mathbf{M}^{(k)}\mathbf{M}^{(k-1)} \cdots \mathbf{M}^{(1)}\mathbf{A} = \mathbf{R}$. Mais

$$\det(\mathbf{M}^{(k)})\det(\mathbf{M}^{(k-1)}) \cdots \det(\mathbf{M}^{(1)})\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{R}).$$

Puisque $\mathbf{R}$ est une matrice carrée, $\mathbf{A}$ est non singulière si et seulement si $\mathbf{R}$ ne contient pas de ligne nulle. Si $\mathbf{R}$ contient une telle ligne, alors $\det(\mathbf{R}) = 0$. Sinon, $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ dont le déterminant est 1. □

Corollaire 5.1. *Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\mathbb{K}$ un corps. Alors $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ si et seulement si $\mathbf{A}$ est inversible.*

Exercices

1. Démontrez que si $\mathbf{A}$ est inversible, alors $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})}$.
2. Démontrez que si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^4$, alors $\det(-\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$.

Solutions

1. Notons que, dans ce cas,

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}^{-1})\det(\mathbf{A}) &= \det(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}) \\ &= \det(\mathbf{I}) = 1,\end{aligned}$$

   d'où $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})}$.

2. $\det(-\mathbf{A}) = \det((-1)\mathbf{A}) = (-1)^4 \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$.

5.5 Méthodes efficaces

En général, on préfère éviter de calculer le déterminant d'une matrice directement à partir de la définition. Dans cette section, nous étudions deux méthodes efficaces permettant le calcul du déterminant.

5.5.1 Calculer le déterminant à l'aide des opérations élémentaires sur les lignes.

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\mathbb{K}$ un corps. Rappelons que l'ajout d'un multiple d'une ligne de $\mathbf{A}$ à une autre ligne de $\mathbf{A}$ n'a aucun effet sur la valeur du déterminant et que l'échange de deux lignes modifie la valeur du déterminant par un facteur de -1. Si on n'utilise que ces deux types d'opérations afin de transformer $\mathbf{A}$ en une matrice $\mathbf{A}'$ triangulaire supérieure, alors $\det(\mathbf{A}) = (-1)^p \det(\mathbf{A}')$, où p est le nombre d'échanges et $\det(\mathbf{A}')$ est le produit des éléments sur la diagonale de $\mathbf{A}'$.

Exemple 5.8.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} && (L_1 \leftarrow L_1 + 4L_2) \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} && (L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2) \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} && (L_1 \leftrightarrow L_2) \\
&= -\left(-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \right) && (L_2 \leftrightarrow L_3) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (-2) = -6.
\end{aligned}$$

5.5.2 Méthode des cofacteurs

Soient $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ et $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. On définit $\mathbf{A}(i \mid j)$ par la matrice obtenue de $\mathbf{A}$ en enlevant la i-ième ligne i et la j-ième colonne de $\mathbf{A}$. La matrice $\mathbf{A}(i \mid j)$ est parfois appelée le (i, j)-**ième mineur** de $\mathbf{A}$.

Exemple 5.9. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. Alors

— $\mathbf{A}(1 \mid 1) = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$,

— $\mathbf{A}(2 \mid 2) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$,

— $\mathbf{A}(3 \mid 1) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$.

On peut calculer le déterminant d'une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ en utilisant **la formule du cofacteur**.

Choisissons n'importe quel $i \in \{1, \ldots, n\}$. Alors

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(\mathbf{A}(i \mid j)).$$

On dit souvent que le côté droit est **l'expansion du cofacteurs selon la i-ième lignee**. (Cette formule peut être obtenue directement de la définition originale du déterminant.)

On peut aussi le faire selon la j-ième colonne :

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(\mathbf{A}(i \mid j)).$$

On peut simplifier la notation en utilisant $C_{\mathbf{A}}(i,j)$ pour dénoter $(-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}(i \mid j))$. Le terme $C_{\mathbf{A}}(i,j)$ est un **cofacteur** de $\mathbf{A}$.

Ainsi, l'expansion en cofacteurs selon la i-ième ligne peut s'écrire sous la forme

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} C_{\mathbf{A}}(i,j),$$

et l'expansion selon la j-ième colonne sous la forme

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} C_{\mathbf{A}}(i,j).$$

Exemple 5.10. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. On calcule $\det(\mathbf{A})$ en effectuant l'expansion en

cofacteurs selon la seconde ligne.

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= \sum_{j=1}^{3}(-1)^{2+j}a_{2,j}\det(\mathbf{A}(2 \mid j)) \\ &= -4\begin{vmatrix}2 & 3\\ 8 & 9\end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix}1 & 3\\ 7 & 9\end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix}1 & 2\\ 7 & 8\end{vmatrix} \\ &= -4(2\cdot 9 - 3\cdot 8) + 5(1\cdot 9 - 3\cdot 7) - 6(1\cdot 8 - 2\cdot 7) \\ &= 24 - 60 + 36 \\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbf{A}$ n'est pas inversible.

Exemple 5.11. L'expansion en cofacteurs peut s'avérer très utile lorqu'une matrice contient plusieurs éléments nuls. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & \mathbf{a}^{\mathsf{T}}\\ \mathbf{0}_{n-1} & \mathbf{B}\end{bmatrix}$, où $\mathbf{a}^{\mathsf{T}} \in \mathbb{K}^{1\times(n-1)}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$ et $\mathbf{0}_{n-1}$ est le $(n-1)$-uplet nul. Selon la formule d'expension en cofacteurs selon la première colonne, on obtient $\det(\mathbf{A}) = (-1)^{1+1}a_{1,1}\det(\mathbf{A}(1 \mid 1)) = 1\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{B})$, puisque $a_{i,1} = 0$ pour tout $i \geq 2$.

Exercices

1. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$. Déterminez $C_{\mathbf{A}}(2,3)$.
2. Calculez le déterminant de $\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 5\\ 2 & -1 & -4\end{bmatrix}$ en utilisant la méthode des cofacteurs sur la deuxième colonne.

Solutions

1. Notons que

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{A}}(2,3) &= (-1)^{2+3}\det(\mathbf{A}(2 \mid 3)) \\ &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ &= -(8-14) = 6. \end{aligned}$$

2. Notons que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}(0)\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}(4)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -32 + (-1) = -33.$$

5.6 Règle de Cramer

On fait ici le lien entre le déterminant et les systèmes d'équations linéaires. Considérons le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, où $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ un corps. Si $\mathbf{A}$ est inversible, la règle de Cramer indique que l'unique solution est donnée par

$$x_i = \frac{\det(\mathbf{B}^{(i)})}{\det(\mathbf{A})},\ i = 1, \ldots, n,$$

où $\mathbf{B}^{(i)}$ est obtenue de $\mathbf{A}$ en remplaçant la i-ième colonne par $\mathbf{b}$.

Exemple 5.12. Supposons que $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$. Alors l'unique solution de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ est donnée par

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{2}{-1} = -2,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{-1} = 3.$$

5.6.1 Formule pour la matrice inverse

Nous obtenons maintenant une formule permettant de déterminer l'inverse d'une matrice $\mathbf{A}$ (si elle est inversible) en terme des cofacteurs de $\mathbf{A}$. Observons que l'on peut réécrire $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$ à l'aide des n équations $\mathbf{AB}_j = \mathbf{e}^{(j)}$, où $\mathbf{B}_j$ dénote la j-ième colonne de $\mathbf{B}$ et $\mathbf{e}^{(j)}$ dénote la j-ième colonne de $\mathbf{I}_n$.

En utilisant la règle de Cramer, on voit que

$$b_{i,j} = \frac{\det(\mathbf{P}^{(i)})}{\det(\mathbf{A})},$$

où $\mathbf{P}^{(i)}$ dénote la matrice obtenue de $\mathbf{A}$ en remplaçant la colonne i-ième par $\mathbf{e}^{(j)}$. Le développement de $\det(\mathbf{P}^{(i)})$ selon la i-ième colonne nous mène à $\det(\mathbf{P}^{(i)}) = (-1)^{j+i}\mathbf{A}(j \mid i) = C_{\mathbf{A}}(j, i)$. (Faites attention aux indices!) Il s'ensuit que

$$b_{i,j} = \frac{C_{\mathbf{A}}(j, i)}{\det(\mathbf{A})},$$

d'où,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} C_{\mathbf{A}}(1,1) & C_{\mathbf{A}}(2,1) & \cdots & C_{\mathbf{A}}(n,1) \\ C_{\mathbf{A}}(1,2) & C_{\mathbf{A}}(2,2) & \cdots & C_{\mathbf{A}}(n,2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{\mathbf{A}}(1,n) & C_{\mathbf{A}}(2,n) & \cdots & C_{\mathbf{A}}(n,n) \end{bmatrix}.$$

Exercices

1. Soient $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ Résoudre le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ à l'aide de la règle de Cramer.
2. Soient $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^n$. Démontrez que si $|\det(\mathbf{A})| = 1$, alors la solution de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ne contient que des nombres entiers relatifs.
3. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\mathbb{K}$ un corps. Soit $\mathbf{B} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ telle que

   $$b_{i,j} = C_{\mathbf{A}}(j,i)$$

   pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Montrez que $\mathbf{AB} = \det(\mathbf{A})I_n$.

Solutions

1. La solution est donnée par $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} = 2$ et $x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} = 3.$

2. Puisque $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, $\mathbf{A}$ est inversible. Selon la règle de Cramer, la solution est donnée par
$$x_i = \frac{\det(\mathbf{B}^{(i)})}{\det(\mathbf{A})},\ i = 1, \ldots, n,$$
où $\mathbf{B}^{(i)}$ est obtenue de $\mathbf{A}$ en remplaçant la colonne i par $\mathbf{b}$. Puisque tous les éléments de $\mathbf{B}^{(i)}$ sont des entiers relatifs, $\det(\mathbf{B}^{(i)})$ doit être un entier relatif. Puisque le dénominateur dans l'expression pour x_i est $\det(\mathbf{A}) = \pm 1$, x_i est un entier relatif.

3. Considérons le produit de la i-ième ligne de $\mathbf{A}$ par la j-ième colonne de $\mathbf{B}$:
$$\sum_{p=1}^{n} a_{i,p} C_{\mathbf{A}}(j,p) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{j+p} a_{i,p} \mathbf{A}(j \mid p).$$
Lorsque $i = j$, cette somme devient simplement l'expansion selon la i-ième ligne, c'est-à-dire $\det(\mathbf{A})$. Ainsi, chaque élément de la diagonale de $\mathbf{AB}$ prend la valeur $\det(\mathbf{A})$.
Si $i \neq j$, on montre que
$$\sum_{p=1}^{n} (-1)^{j+p} a_{i,p} \mathbf{A}(j \mid p) = 0,$$
ce qui terminera la démonstration.
Soit $\tilde{\mathbf{A}}$ la matrice obtenue de $\mathbf{A}$ en ajoutant la i-ième ligne à la j-ième ligne. En utilisant la formule des cofacteurs selon la i-ième ligne de $\tilde{\mathbf{A}}$, on obtient
$$\begin{aligned}
\det(\tilde{\mathbf{A}}) &= \sum_{p=1}^{n} (-1)^{j+p} \tilde{a}_{j,p} \tilde{\mathbf{A}}(j \mid p) \\
&= \sum_{p=1}^{n} (-1)^{j+p} (a_{j,p} + a_{i,p}) \mathbf{A}(j \mid p) \\
&= \sum_{p=1}^{n} (-1)^{j+p} a_{j,p} \mathbf{A}(j \mid p) + \sum_{p=1}^{n} (-1)^{j+p} a_{i,p} \mathbf{A}(j \mid p) \\
&= \det(\mathbf{A}) + \sum_{p=1}^{n} (-1)^{j+p} a_{i,p} \mathbf{A}(j \mid p)
\end{aligned}$$

Puisque $\det(\tilde{\mathbf{A}}) = \det(\mathbf{A})$, on voit que

$$\sum_{p=1}^{n}(-1)^{j+p}a_{i,p}\mathbf{A}(j \mid p) = 0$$

tel que désiré.

5.7 Exemple de test portant sur la matière de ce chapitre

1. Soient $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -5 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ et σ la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Quelle valeur prend $a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}a_{3,\sigma(3)}$?
2. Calculez le déterminant de $\begin{bmatrix} -i & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
3. Considérons la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & k & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. Déterminez toutes les valeurs de k qui rendent $\mathbf{A}$ singulière.
4. Soient $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$. Si $\det(\mathbf{A}) = 1 - i$ et $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$, quelle valeur prend $\det(\mathbf{A}^{-2}\mathbf{B}^{\mathsf{T}})$?

Solutions

1. De ce qui est donné, $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 1$ et $\sigma(3) = 2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)} &= a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} \\ &= 4 \cdot (-5) \cdot 2 = -40. \end{aligned}$$

2. Nous allons calculer le déterminant en utilisant trois méthodes différentes.

   Méthode 1 (formule pour les matrices 3×3)

   Le déterminant est

$$\begin{aligned} &(-i) \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot (-1) - (-i) \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 \\ =& -1 - 2i. \end{aligned}$$

   Méthode 2 (réduction)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -i & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} && (L_1 \leftrightarrow L_2) \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} && (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1+2i & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} && (L_2 \leftarrow L_2 + iL_1) \\ &= -(1+2i) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} && (L_2 \leftarrow \tfrac{1}{1+2i} L_2) \\ &= (-1-2i) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} && (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2) \\ &= -1 - 2i. \end{aligned}$$

   Méthode 3 (méthode des cofacteurs)

   Notons qu'il y a plusieurs éléments nuls dans la troisième colonne. En utilisant la méthode des cofacteurs selon la troisième colonne, on obtient

$$(-1)^{3+3}(1) \begin{vmatrix} -i & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-i) \cdot 2 - 1 \cdot 1 = -1 - 2i$$

3. Puisque $\mathbf{A}$ est une matrice des nombres réels, $\mathbf{A}$ est singulière si et seulement si $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Notons que dans la deuxième, seul l'élément de la quatrième colonne est non nul. Ainsi, en utilisant la méthode des cofacteurs selon la deuxième ligne, on voit que $\det(\mathbf{A})$ est simplement

$$\begin{aligned}
&(-1)^{2+4}(-1)\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 0 & k \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -\left(k \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot k \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 \cdot 1 - (-1) \cdot k \cdot k - 2 \cdot 1 \cdot 1\right) \\
&= -\left(k - 1 + k^2 - 2\right) \\
&= -k^2 - k + 3.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\det(\mathbf{A}) = 0$ si et seulement si $k = (-1 \pm \sqrt{13})/2$, d'où $\mathbf{A}$ est singulière lorsque $k = (-1 + \sqrt{13})/2$ ou $k = (-1 - \sqrt{13})/2$.

4. On écrit $\det(\mathbf{A}^{-2}\mathbf{B}^{\mathsf{T}})$ en termes de $\det(\mathbf{A})$ et $\det(\mathbf{B})$. Puisque $\mathbf{B}$ est triangulaire supérieure, $\det(\mathbf{B})$ est donné par le produit des éléments sur la diagonale, qui est $2i$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}^{-2}\mathbf{B}^{\mathsf{T}}) &= \det(\mathbf{A}^{-2})\det(\mathbf{B}^{\mathsf{T}}) \\
&= \det((\mathbf{A}^{-1})^2)\det(\mathbf{B}) \\
&= \det(\mathbf{A}^{-1})^2(2i) \\
&= \left(\frac{1}{\det(\mathbf{A})}\right)^2(2i) \\
&= \left(\frac{1}{1-i}\right)^2(2i) \\
&= \frac{1}{-2i}(2i) \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Chapitre 6

Espaces vectoriels

Ce chapitre présente sans aucun doute le sujet le plus important en algèbre linéaire: les espaces vectoriels. Ces derniers apparaissent dans plusieurs domaines des mathématiques. Ils sont utilisés en statistiques et en modélisations, en traitements des signaux, en cryptographie etc. On les rencontre lorsqu'on étudie les équations différentielles et le calcul de plusieurs variables. La maîtrise du matériel de ce chapitre permet de:

— Définir et identifier un espace vectoriel.

— Définir et identifier une combinaison linéaire, un sous-espace engendré par des vecteurs et un sous-espace.
— Définir l'indépendance linéaire.
— Déterminer si un ensemble de vecteurs est linéairement indépendant.
— Définir et obtenir une base pour un espace vectoriel.
— Définir le noyau, l'espace des colonnes et l'espace des lignes d'une matrice.
— Obtenir des bases du noyau, de l'espace des colonnes et de l'espace des lignes d'une matrice.
— Énoncer et appliquer la formule du rang-nul.
— Définir et calculer le rang d'une matrice.
— Obtenir des représentations de vecteurs sous forme d'uplets.
— Définir et obtenir des matrices de changement de base.

Les connaissances requises incluent les corps, l'algèbre des matrices, et la résolution de systèmes d'équations linéaires.

6.1 Motivation

Vous avez peut-être vu dans un cours de physique à l'école secondaire qu'un vecteur est une quantité ayant une longueur et une direction. Une telle définition est suffisante pour les problèmes de physique du secondaire, mais nous allons introduire une notion plus générale (et plus abstraite) de façon à pouvoir analyser des applications plus avancées.

Comme c'était le cas pour les corps, la définition d'un espace vectoriel peut sembler technique et arbitraire à première vue. Le concept à une longue histoire. En bref, les propriétés d'un espace vectoriel font abstraction de propriétés communes à plusieurs structures mathématiques.

On motive la définition des espaces vectoriels à l'aide de plusieurs exemples.

Considérons le système

$$\begin{aligned} u - 3v + 2z &= 0 \\ y - z &= 0. \end{aligned}$$

On peut l'écrire sous la forme $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, où $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

Notons que $\mathbf{A}$ est déjà sous forme échelonnée réduite. De plus, v et z sont des variables libres. Ainsi, toutes les solutions sont donnés par

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

où $s, t \in \mathbb{R}$.

Notons que l'on peut aussi l'écrire sous la forme $\mathbf{A}'\mathbf{x}' = 0$, où $\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} z \\ y \\ v \\ u \end{bmatrix}$.

La forme échelonnée réduite de $\mathbf{A}'$ est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Les deux dernières colonnes de cette matrice ne sont pas des pivots. Mais les variables qui correspondent à ces colonnes sont les variables en troisième et quatrième position dans $\mathbf{x}'$, c'est-à-dire v et u. Donc, toutes les solutions sont données par

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ y \\ z \end{bmatrix} = s' \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} + t' \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

où $s', t' \in \mathbb{R}$.

Nous avons donc deux descriptions apparemment différentes pour les solutions de

$$\begin{aligned} u - 3v + 2z &= 0 \\ y - z &= 0, \end{aligned}$$

plus précisément,

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

et

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ y \\ z \end{bmatrix} = s' \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} + t' \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad s', t' \in \mathbb{R}.$$

Il y a une certaine ressemblance entre $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (première description) et $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (seconde description); la première est obtenue en multipliant la deuxième par -2. Cependant, il n'y a aucun lien immédiat entre $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$. Il doit y avoir un lien, étant donné les deux mêmes ensembles solutions, mais quel est-il?

Comme $\begin{bmatrix} u \\ v \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ est une solution, il doit exister des nombres réels s et t tels que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Notons que c'est le cas de $s = 1$ et de $t = \frac{3}{2}$.

De la même manière, comme $\begin{bmatrix} u \\ v \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ est une solution, il doit exister des nombres réels s' et t' tels que

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = s' \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} + t' \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

C'est le cas de $s' = 1$ et $t' = 3$.

Nous sommes maintenant prêts à faire quelques remarques d'ordre général.

Observons que les deux descriptions ont la forme $\alpha\mathbf{u} + \alpha'\mathbf{u}'$, où α et α' sont des scalaires et $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}'$ sont des uplets de même taille. Nous appelons $\alpha\mathbf{u} + \alpha'\mathbf{u}'$ une **combinaison linéaire** de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}'$. Ce n'est pas une coïncidence — on s'attend à ce que toute description de l'ensemble solution s'exprime à l'aide de telles combinaisons linéaires. Nous discuterons de ce phénomène lorsque nous aborderons les bases et la dimension d'un espace vectoriel.

Plus généralement, si $\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)}$ sont des n-uplets et $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sont des scalaires, alors

$$\alpha_1\mathbf{u}^{(1)} + \cdots + \alpha_k\mathbf{u}^{(k)}$$

est appelé une **combinaison linéaire** de $\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)}$.

Ainsi, si $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, où $\mathbb{K}$ est un corps, les solutions de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ peuvent être exprimées en tant que combinaisons linéaires de n-uplets dans $\mathbb{K}^n$.

Rappelons que $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ dénote l'ensemble des solutions du système $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, pour $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$.

Si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$, alors $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ est aussi une solution de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. En effet,

$$\mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{Au} + \mathbf{Av} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Ainsi, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$. Autrement dit, la somme de deux éléments de $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ est aussi un élément de $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$.

Ensuite, si $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$, alors $\mathbf{A}(\alpha\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{Av}) = \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$, d'où $\alpha\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$. Autrement dit, le multiple scalaire par un scalaire d'un élément de $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ est aussi un élément de $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$.

Puisque la somme de deux éléments de $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ est un élément de $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ et que la multiple d'un élément de $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ par un scalaire est un élément de $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$, nous disons de $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ qu'il est fermé par rapport à l'addition (donné par l'addition d'uplets) et à la multiplication par un scalaire.

Dans la prochaine section, nous verrons que $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ n'est pas le seul tel ensemble.

Exercices

1. Écrivez $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ en tant que combinaison linéaire de $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
2. Écrivez $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ en tant que combinaison linéaire de $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, et $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Solutions

1. $\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} = (1)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$.
2. $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = (1)\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$.

6.2 Définition d'un espace vectoriel

Nous venons d'explorer un certain nombre de propriétés de $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$, où $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, en particulier:

1. Pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$, $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$.
2. Pour tout $\mathbf{u} \in \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ et tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha\mathbf{u} \in \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$.
3. Il existe $\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)} \in \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ tels que $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \{\alpha_1\mathbf{u}^{(1)} + \cdots \alpha_k\mathbf{u}^{(k)} : \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}\}$.

Nous montrons maintenant que ces propriétés sont partagées par un ensemble à l'allure très différente.

Soit $P_2(\mathbb{K})$ l'ensemble des polynômes en x à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré au plus 2, c'est-à-dire,

$$P_2(\mathbb{K}) = \{ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{K}\}.$$

Si on remplace chaque mention de $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ par $P_2(\mathbb{K})$, les trois propriétés deviennent

1. Pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in P_2(\mathbb{K})$, $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in P_2(\mathbb{K})$.
2. Pour tout $\mathbf{u} \in P_2(\mathbb{K})$ et tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha\mathbf{u} \in P_2(\mathbb{K})$.
3. Il existe $\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)} \in P_2(\mathbb{K})$ tels que $P_2(\mathbb{K}) = \{\alpha_1\mathbf{u}^{(1)} + \cdots \alpha_k\mathbf{u}^{(k)} : \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}\}$.

La première propriété est satisfaite puisque

$$\begin{aligned} &(a_1x^2 + b_1x + c_1) + (a_2x^2 + b_2x + c_2) \\ =\ &(a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2), \end{aligned}$$

qui est un élément de $P_2(\mathbb{K})$.

La seconde propriété est satisfaite puisque la multiplication de $ax^2 + bx + c$ par $\gamma \in \mathbb{K}$ donne $(\gamma a)x^2 + (\gamma b)x + \gamma c$, qui est un élément de $P_2(\mathbb{K})$.

La troisième propriété est satisfaite avec $\mathbf{u}^{(1)} = x^2 + 0x + 0$, $\mathbf{u}^{(2)} = 0x^2 + x + 0$, $\mathbf{u}^{(3)} = 0x^2 + 0x + 1$. Alors, $P_2(\mathbb{K}) = \{a\mathbf{u}^{(1)} + b\mathbf{u}^{(2)} + c\mathbf{u}^{(2)} : a, b, c \in \mathbb{K}\}$.

La coïncidence n'existe pas: $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ et $P_2(\mathbb{K})$ partagent ces propriétés car ils sont tous deux des espaces vectoriels de dimension finie. (Nous allons approfondir le concept de la dimension dans une section ultérieure.)

Soit V un ensemble muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire, dont les scalaires proviennent d'un corps $\mathbb{K}$. Supposons que V soit fermé et sous l'addition et sous la multiplication par un scalaire.

La paire $(V, \mathbb{K})$ est appelé un **espace vectoriel** si

- $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$ pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$.
- $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.
- $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$ pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
- $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$ pour tout $\mathbf{x} \in V$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
- il existe un élément $\mathbf{0}_V \in V$, appelé le **vecteur nul** tel que $\mathbf{0}_V + \mathbf{v} = \mathbf{v}$ pour tout $\mathbf{v} \in V$. On écrit souvent $\mathbf{0}$ au lieu de $\mathbf{0}_V$, lorsque le contexte le permet.
- pour chaque $\mathbf{v} \in V$, il existe un élément $\mathbf{v}' \in V$, appelé **l'opposé** de $\mathbf{v}$, tel que $\mathbf{v} + \mathbf{v}' = \mathbf{0}_V$. (On écrit souvent $-\mathbf{v}$ au lieu de $\mathbf{v}'$)
- $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$ pour tout $\mathbf{x} \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
- $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ pour tout $\mathbf{x} \in V$, où 1 dénote l'élément neutre pour la multiplication de $\mathbb{K}$.

Lorsque l'identité du corps $\mathbb{K}$ est évidente selon le contexte, l'espace vectoriel (V, $\mathbb{K}$) est dénoté par V, tout simplement. Si on veut rappeler la présence de $\mathbb{K}$, on dit de V qu'il est "à scalaires dans $\mathbb{K}^n$. Les éléments de V sont des **vecteurs**.

$\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ est plus communément appelé le **noyau** de $\mathbf{A}$. Nous étudierons le noyau d'une matrice en détails dans une section ultérieure.

Remarques. Le vecteur nul de $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ est $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$. Le vecteur nul de $P_2(\mathbb{K})$ est le polynôme $0x^2 + 0x + 0$. L'opposé de $ax^2 + bx + c$ dans $P_2(\mathbb{K})$ est $(-a)x^2 + (-b)x + (-c)$. Bien que nous ne le ferons pas dans cet ouvrage, il est possible de vérifier que $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ et $P_2(\mathbb{K})$ satisfont les propriétés d'un espace vectoriel.

6.2.1 Soustraction de vecteurs

La soustraction du vecteur $\mathbf{v}$ de $\mathbf{u}$, dénotée par $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, est définie par $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v}'$, où $\mathbf{v}'$ est l'opposé de $\mathbf{v}$. On peut montrer que $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}$, où -1 est l'opposé de l'élément neutre pour la multiplication de $\mathbb{K}$.

Exercice

1. Soit $(V, \mathbb{K})$ un espace vectoriel. Montrez que pour chaque vecteur $\mathbf{u}$ de V, l'opposé de $\mathbf{u}$ est égal à $(-1)\mathbf{u}$, où -1 dénote l'opposé de l'élément neutre pour la multiplication de $\mathbb{K}$.

Solution

1. Puisque

$$\begin{aligned} 0\mathbf{u} &= (1+(-1))\mathbf{u} \\ &= 1\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} \\ &= \mathbf{u} + (-1)\mathbf{u}, \end{aligned}$$

il suffit de montrer que $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Notons que

$$\begin{aligned} 0\mathbf{u} &= (0+0)\mathbf{u} \\ &= 0\mathbf{u} + 0\mathbf{u} \end{aligned}$$

L'ajout de l'opposé de $0\mathbf{u}$ de part et d'autre de cet égalité donne $\mathbf{0} = 0\mathbf{u}$, tel que désiré.

6.3 Espaces vectoriels communément rencontrés

Soit $\mathbb{K}$ un corps et n un entier positif. Alors $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel à scalaires dans $\mathbb{K}$, avec l'addition de n-uplets et la multiplication par un scalaire.

$\mathbb{K}^n$ est probablement l'espace vectoriel le plus communément étudié, particulièrement lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $n \leq 3$. Par exemple, on parle souvent du plan $\mathbb{R}^2$ et de l'espace $\mathbb{R}^3$ par un espace en 3 dimensions.

Le vecteur nul de $\mathbb{K}^n$ est le n-uplet dont les composantes sont nulles.

Plus généralement, $(\mathbb{K}^{m\times n}, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel avec l'addition matricielle et la multiplication par un scalaire. Le vecteur nul de $\mathbb{K}^{m\times n}$ est la matrice de taille $m \times n$ dont tous les éléments sont nuls.

L'ensemble des polynômes en x à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel avec l'addition des polynômes et la multiplication d'un polynôme par un scalaire. Le vecteur nul est le polynôme zéro, c'est-à-dire celui dont tous les coefficients sont nuls.

Le degré des polynômes peut être restreint ou non restreint. Par exemple, nous pouvons considérer l'espace vectoriel des polynômes en x de degré au plus à coefficients réels. Dans un tel espace vectoriel, tous les vecteurs peuvent s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice

1. Montrez que $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel à scalaire dans $\mathbb{R}$, où l'addition de vecteurs $u, v \in \mathbb{C}$ est donné par l'addition habituelle des nombres complexes et la multiplication par un scalaire est la multiplication habituelle d'un complexe par un réel.

Solution

1. Notons que chaque nombre complexe peut s'écrire sous la forme $a + bi$, pour $a, b \in \mathbb{R}$. Pour tout nombre réel λ, $\lambda(a + bi) = \lambda a + \lambda bi$, qui est de la forme désirée. Il est maintenant facile de vérifier que toutes les propriétés d'un espace vectoriel sont satisfaites en prenant $0 + 0i$ comme le vecteur nul et $(-a) + (-b)i$ comme opposé de $a + bi$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$.

6.4 Sous-espaces

Soient $(V, \mathbb{K})$ et $(W, \mathbb{K})$ des espaces vectorielles tels que

— l'ensemble des vecteurs de W est contenu dans l'ensemble des vecteurs de V,
— V et W partagent la même addition et la même multiplication par un scalaire.

Alors W est un **sous-espace** de V. De plus, si $W \neq V$, alors W est un **sous-espace propre** de V.

Exemple 6.1. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, où $\mathbb{K}$ est un corps. Le noyau de $\mathbf{A}$ est un sous-espace de $\mathbb{K}^n$. (Rappellons que le noyau de $\mathbf{A}$ est $\{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n \,:\, \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\}$.)

6.4.1 Test du sous-espace

Soient V un espace vecteur vectoriel et W un ensemble de vecteurs de V. Comment détermine-t-on si W est un sous-espace de V?

Le fait que W soit un sous-ensemble de V ne le rend pas automatiquement un sous-espace de V. Par exemple, si W ne contient pas le vecteur nul, alors ce n'est pas un espace vectoriel, et donc pas un sous-espace vectoriel.

Bien sûr, on peut vérifier si W est un espace vectoriel en vérifiant les propriétés d'un espace vectoriel une par une. Mais il y a un raccourci: il suffit de vérifier que W est fermé par rapport à l'addition de vecteurs et à la multiplication par un scalaire tels que défini pour V.

Exemple 6.2. Soit $W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \,:\, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$. Il va de soit que $W \subseteq \mathbb{R}^2$. Cependant, W n'est pas un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ car il n'est pas fermé par rapport à la multiplication par un scalaire. En effet, soit $\alpha \notin \mathbb{Z}$ un nombre réel. Alors $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in W$ mais $\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \notin W$ puisque $\alpha \notin \mathbb{Z}$.

Exemple 6.3. Est-ce que $U = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, \begin{array}{l} x + y = 0 \\ x - y = 1 \end{array} \right\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$?

Notons que si c'est le cas, U doit contenir le vecteur nul $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Cependant, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ n'est pas une solution du système

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ x - y &= 1, \end{aligned}$$

d'où $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin U$, ce qui implique que U n'est pas un sous-espace de $\mathbb{R}^2$.

Exercices

1. Donnez un exemple d'un sous-espace propre de $P_2(\mathbb{R})$.
2. Soit $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & 0 \end{bmatrix} \ : \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Montrez que W est un sous-espace de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Solutions

1. Soit $W = \{ax^2 : a \in \mathbb{R}\}$. Alors si $u = ax^2$ et $v = a'x^2$, où $a, a' \in \mathbb{R}$, alors $u, v \in W$. De plus, $u + v = (a + a')x^2 \in W$.

   Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u = (\lambda a)x^2 \in W$. Ainsi, W est un sous-espace de $P_2(\mathbb{R})$. Mais $W \neq P_2(\mathbb{R})$ puisque $x \in P_2(\mathbb{R})$ et $x \notin W$. On conclut que W est un sous-espace propre de $P_2(\mathbb{R})$.

2. Nous montrons d'abord que W est fermé par rapport à l'addition de vecteurs (qui est simplement l'addition de matrices) et à la multiplication par un scalaire.

   Soient $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in W$. Alors il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que

   $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

   et

   $$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} c & d \\ d & 0 \end{bmatrix}.$$

   Notons que

   $$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} (a+c) & (b+d) \\ (b+d) & 0 \end{bmatrix},$$

   qui réside dans W. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

   $$\lambda\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & 0 \end{bmatrix},$$

   qui se retrouve aussi dans W.

6.5 Combinaison linéaire et espace engendré

Soient $(V, \mathbb{K})$ un espace vectoriel, $\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)} \in V$, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$. La somme

$$\alpha_1 \mathbf{v}^{(1)} + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}^{(k)}$$

est une **combinaison linéaire** de $\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}$.

Exemple 6.4. $2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ est une combinaison linéaire des 2-uplets $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$.

Exemple 6.5. $3\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 0\end{bmatrix}$ est une combinaison linéaire des matrices $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 0\end{bmatrix}$. (Notons que l'on écrit souvent $3\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 0\end{bmatrix}$ au lieu.)

Exemple 6.6. Le polynôme $ax^2 + bx + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$, peut être considéré comme une combinaison linéaire des polynômes x^2, x et 1.

L'espace engendré par $\left\{\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}\right\}$ (ou l'espace engendré par $\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}$), dénoté par $\mathrm{Vect}\left(\left\{\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}\right\}\right)$, est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}$.

L'espace engendré par l'ensemble vide est l'espace vectoriel ne contenant que le vecteur nul. (Cette définition est parfois nécessaire afin de raccourcir certaines preuves.)

Exemple 6.7. L'espace engendré par les matrices $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ est l'ensemble de toutes les matrices de la forme $\begin{bmatrix}a & b\\b & 0\end{bmatrix}$, puisque toutes les combinaisons linéaires de ces matrices peuvent s'écrire sous la forme $a\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$.

Exemple 6.8. $\mathrm{Vect}\left(\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}\right) = \mathbb{R}^2$ puisque $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ peut s'écrire sous la forme $x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$.

Exemple 6.9. Voici une version plus générale de l'exemple précédant. Soient n un entier positif et $\mathbb{K}$ un corps. Si $\mathbf{e}^{(k)}$ dénote le n-uplet où toutes les composantes sont nulles, sauf la k-ième qui est 1, alors $\mathrm{Vect}\left(\{\mathbf{e}^{(1)}, \ldots, \mathbf{e}^{(n)}\}\right) = \mathbb{K}^n$.

Exemple 6.10. On montre que $\mathrm{Vect}\left(\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right\}\right) = \mathbb{R}^2$.

Il suffit de montrer que chaque $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ peut s'écrire en tant que combinaison linéaire de

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$, c'est-à-dire qu'il existe des scalaires α et β tels que $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$, ou de façon équivalente, $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha+\beta\\\alpha-\beta\end{bmatrix}$.

C'est un système linéaire qui prend la forme

$$\begin{aligned}\alpha+\beta &= x\\ \alpha-\beta &= y.\end{aligned}$$

Ce système admet la solution $\alpha = \frac{x+y}{2}$ et $\beta = \frac{x-y}{2}$. Donc, $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ est une combinaison linéaire de $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$.

De la définition d'un espace vectoriel, on voit directement que si $\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}$ sont des vecteurs d'un espace vectoriel V, alors V contient chaque combinaison linéaire de $\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}$. Ainsi, V contient l'espace engendré par $\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}$. On le voit assez facilement dans le cas $k = 2$: soient $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)} \in V$, α, β des scalaires. Puisque V est fermé par rapport à la multiplication par un scalaire, nous avons $\alpha\mathbf{v}^{(1)}, \beta\mathbf{v}^{(2)} \in V$. En utilisant le fait que V est fermé par rapport à l'addition, on obtient $\alpha\mathbf{v}^{(1)} + \beta\mathbf{v}^{(2)} \in V$. Ainsi, V contient l'espace engendré de $\{\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}\}$.

Proposition 6.1. *Soit V un espace vectoriel. Soit $\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)} \in V$. Alors l'espace engendré par $\{\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}\}$ est un sous-espace de V.*

Par exemple, soit V l'espace engendré de $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ dans $\mathbb{R}^2$. Alors chaque vecteur de V prend la forme $\begin{bmatrix}a\\2a\end{bmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$. Notons que chaque vecteur de V est aussi un vecteur de $\mathbb{R}^2$, mais que $V \neq \mathbb{R}^2$. Ainsi, V est un sous-espace propre de $\mathbb{R}^2$.

Lorsqu'un espace vectoriel V est égal à $\mathrm{Vect}\left(\{\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}\}\right)$ pour $\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)} \in V$, nous avons une description de tous les vecteurs de V. Chaque vecteur de V est une combinaison linéaire de ces k vecteurs. Cette propriété est très jolie et sera explorée en détail. Cependant, nous verrons qu'il y a des espaces vectoriels qui ne sont pas engendrés par un ensemble fini de vecteurs.

Exercices

1. Soit V un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ donné par l'espace engendré de l'ensemble $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. Montrez que V est un sous-espace propre de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminez l'espace engendré des ensembles suivants, à scalaires dans $\mathbb{R}$. Exprimez vos réponses le plus brièvement possible.
   a. $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$
   b. $\{x - 1, x + 2\}$
   c. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

Solutions

1. Montrons qu'on ne peut écrire $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ en tant que combinaison linéaire de $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$.

   Supposons, au contraire, qu'il existe des réels α et β tels que

   $$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}.$$

   En comparant les éléments de la seconde composante, on obtient $\beta = 1$. Il s'ensuit que $\alpha = 0$ selon les éléments de la première composante. Avec ces valeurs, cependant, le côté droit se réduit à $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, qui est différent du côté gauche.

2. a. $\mathbb{R}^3$

   b. $\{ax + b \,:\, a, b \in \mathbb{R}\}$

   c. $\left\{\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix} \,:\, a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$

6.6 Espaces vectoriels de dimension infinie

Ce ne sont pas tous les espaces vectoriels qui sont engendrés par un nombre fini de vecteurs. Un tel espace vectoriel est dît **de dimension infinie**. Voici maintenant un exemple d'un espace vectoriel de dimension infinie.

Soit P l'espace vectoriel de tous les polynômes en x à coefficients dans $\mathbb{Q}$. (Il n'est pas difficile de vérifier que P est un espace vectoriel muni de l'addition de polynômes et de la multiplication d'un polynôme par un nombre rationnel.) Par exemple, les vecteurs suivants sont éléments de P:

$$\begin{gathered} 5, \\ x^{1000} + 2x, \\ x^4 + x^3 - x^2 + 8. \end{gathered}$$

La somme des deux premiers donne $x^{1000} + 2x + 5$, tandis que la multiplication du dernier par 3 donne $3x^3 + 3x^3 - 3x^2 + 24$, par exemple.

Montrons que P est de dimension infinie.

Supposons au contraire que P soit engendré par k polynômes $\mathbf{p}^{(1)}, \ldots, \mathbf{p}^{(k)} \in P$. Soit m le degré maximum de ces k polynômes. Dans ce cas, x^{m+1} est un vecteur de P, mais il ne peut être écrit en tant que combinaison linéaire de $\mathbf{p}^{(1)}, \ldots, \mathbf{p}^{(k)}$ car une combinaison linéaires de polynômes de degré inférieurs ou égaux à m ne saurait donner un polynôme de degré supérieur à m. Donc, x^{m+1} n'appartient pas à l'espace engendré par $\{\mathbf{p}^{(1)}, \ldots, \mathbf{p}^{(k)}\}$, ce qui est une contradiction.

Un espace vectoriel dont la dimension n'est pas infinie est dît de **de dimension finie**. Par exemple, l'espace vectoriel des polynômes en x de degré au plus k est engendré par l'ensemble fini de vecteurs $\{1, x, x^2, \ldots, x^k\}$.

6.7 Indépendance linéaire

Un ensemble de vecteurs est dit **minimal** si on ne peut retirer un des vecteurs sans modifier l'espace engendré.

Exemple 6.11. L'ensemble $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ est minimal dans $\mathbb{R}^3$. En effet, si on retire le premier élément, on ne peut engendrer de vecteurs avec une troisième composante non nulles. Si on retire le second, auncun des vecteurs engendrés ne possède une seconde composante non nulle.

Exemple 6.12. L'ensemble $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, où $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sont des vecteurs d'un espace vectoriel à scalaires dans $\mathbb{R}$ satisfaisant à $\mathbf{u} = 2\mathbf{v} - \mathbf{w}$ n'est pas minimal. Dans l'espace engendré par $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, chaque vecteur peut s'écrire sous la forme $\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}+\gamma\mathbf{w}$, pour des scalaires α, β, γ. Puisque $\mathbf{u} = 2\mathbf{v} - \mathbf{w}$, $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w}$ peut aussi s'écrire sous la forme

$$\alpha(2\mathbf{v} - \mathbf{w}) + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w} = (2\alpha + \beta)\mathbf{v} + (\gamma - \alpha)\mathbf{w},$$

qui n'est qu'une combinaison linéaire de $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$. On peut alors retirer $\mathbf{u}$ avec impunité.

Soit V un espace vectoriel à scalaires dans un corps $\mathbb{K}$. Les vecteurs $\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}$ de V sont dit **linéairement indépendants** s'il n'existe pas d'indice $i \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $\mathbf{v}^{(i)}$ appartient à l'espace engendré par les $k - 1$ autres vecteurs.

On peut définir l'indépendance linéaire d'une façon équivalente: $\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}$ sont linéairement indépendants si et seulement si la seule combinaison linéaire pour laquelle $\lambda_1\mathbf{v}^{(1)} + \cdots + \lambda_k\mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{0}_V$ est celle où $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.

Si $\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}$ sont linéairement indépendants, $\left\{\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}\right\}$ est appelé un **ensemble linéairement indépendant**.

Proposition 6.2. *Un ensemble fini de vecteurs est minimal si et seulement s'il est linéairement indépendant.*

Les détails de la preuve sont laissés en exercice.

Observons que tout l'ensemble de vecteurs contenant le vecteur nul n'est pas linéairement indépendant, par définition. (Pourquoi?)

L'indépendance linéaire est une notion fondamentale de l'étude des espaces vectoriels. Comme nous allons le voir, plusieurs résultats ne peuvent être exprimés sans passer par ce concept.

Exemple 6.13. Les vecteurs $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^3$.

On le démontre en considérant l'équation

$$\lambda_1 \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

ou, de façon équivalente, $\begin{bmatrix}\lambda_1 + \lambda_2\\ \lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$. La solution unique est $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Il s'ensuit que les vecteurs sont linéairement indépendants.

Exemple 6.14. Montrons que x^2-1 et $x+1$ sont linéairement indépendants dans $P_2(\mathbb{R})$.

Soit λ_1 et λ_2 des nombres réels tels que $\lambda_1(x^2-1)+\lambda_2(x+1)=0$. En réécrivant le côté gauche, on obtient $\lambda_1 x^2+\lambda_2 x+(-\lambda_1+\lambda_2)=0$. Puisque le côté droit est le polynôme 0, les coefficients de x^2 et de x doivent tous deux être nuls. Ceci implique que $\lambda_1=0$ et $\lambda_2=0$. Par définition, x^2-1 et $x+1$ sont donc linéairement indépendants.

Exercices

1. Montrez que $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$ est un ensemble linéairement indépendant de $\mathbb{Q}^3$.
2. Montrez que $\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$ est un sous-ensemble linéairement indépendant de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
3. Déterminez si $\{x-1, x^2+2x, x^2+2\}$ est un ensemble linéairement indépendant de $P_2(\mathbb{R})$.
4. Soit $S=\{\mathbf{v}^{(1)},\ldots,\mathbf{v}^{(k)}\}$ un sous-ensemble de vecteurs appartenant à un espace vectoriel. Montrez que S est minimal si et seulement s'il est linéairement indépendant.

Solutions

1. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des nombres rationnels tels que

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Le système peut s'exprimer sous la forme

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   La matrice des coefficients se réduit à $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, d'où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ est l'unique solution. Ainsi, l'ensemble donné est linéairement indépendant.

2. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des nombres réels tels que

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Cette équation se réécrit sous la forme

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   En comparant les éléments correspondants de chaque côté, on constate que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ satisfont à

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

   Ainsi, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ est l'unique solution, on en conclut que l'ensemble donné est linéairement indépendant.

3. Ce n'est pas le cas si $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, et $\lambda_3 = 1$, nous obtenons

$$\lambda_1(x-1) + \lambda_2(x^2+2x) + \lambda_3(x^2+2) = 0.$$

   Il y a donc une combinaison linéaire non triviale qui donne le vecteur nul. Les polynômes sont linéairement dépendants.

4. Supposons que S ne soit pas minimal. Sans perte de généralité, supposons que $\mathbf{v}^{(1)}$ puisse s'exprimer comme combinaison linéaire des $n-1$ autres vecteurs de S. Par définition, il existe des scalaires $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$ tels que

$$\mathbf{v}^{(1)} = \sum_{i=2}^{k} \lambda_i \mathbf{v}^{(i)}.$$

Si $\lambda_1 = -1$, on a alors

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{0}.$$

Puisque $\lambda_1 \neq 0$, nous avons trouvé une combinaison linéaire non triviale qui donne le vecteur nul et S est linéairement dépendant.

Réciproquement, supposons que S soit linéairement dépendant. Par définition, il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{0}.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\lambda_1 \neq 0$, Alors,

$$\mathbf{v}^{(1)} = \sum_{i=2}^{k} (-\lambda_1)^{-1} \lambda_i \mathbf{v}^{(i)},$$

ce qui implique que S n'est pas minimal.

6.8 Base et dimension

Soit $(V, \mathbb{K})$ un espace vectoriel. Une **base** de V est un ensemble minimal de vecteurs de V qui engendre V.

De façon équivalente, une **base** de V est un ensemble de vecteurs qui

— est linéairement indépendant, et
— engendre V.

En conséquence, on vérifie si un ensemble de vecteurs forme une base de V en montrant qu'il est linéairement indépendant et qu'il engendre V. Si au moins une conditions n'est pas satisfaite, alors l'ensemble n'est pas une base de V.

Exemple 6.15. Dans $\mathbb{R}^3$, chaque vecteur prend la forme $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$. Notons que $\mathbb{R}^3$ est engendré par l'ensemble $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ puisque

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Il est évident que

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

si et seulement si $a = b = c = 0$, d'où l'ensemble est linéairement indépendant et qui engendre $\mathbb{R}^3$. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. (Notons que l'ensemble $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$, cependant, même s'il engendre $\mathbb{R}^3$ puisqu'il n'est pas linéairement indépendant.)

Exemple 6.16. L'ensemble $\{x^2, x, 1\}$ est une base de $P_2(\mathbb{R})$.

Observons que $\mathbb{R}^3$ possède une infinité de vecteurs mais que nous pouvons décrire tous ces vecteurs à l'aide de seulement trois d'entre eux. On peut s'imaginer une base comme la manière la plus économe de décrire un espace vectoriel, qui facilitent en plus plusieurs types de calculs.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal de cette section.

Théorème 6.1. *Soit $(V, \mathbb{K})$ un espace vectoriel. Soit $B = \left\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(n)}\right\}$ une base de V. Si $U \subseteq V$ est un ensemble linéairement indépendant, alors $|U| \leq n$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un ensemble linéairement indépendant avec $m > n$ vecteurs. Parmi tous les ensembles linéairement indépendants de cardinalité m, on en choisi un, que l'on nomme U, tel que $|U \cap B|$ soit aussi grand que possible.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $U = \left\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(r)}\right\}$ où $k + r = m$ et $k \leq n$.

Notons que l'on doit avoir $k < n$. Sinon, $B \subset U$ implique que $\mathbf{v}^i \in \mathrm{Vect}\,(B)$ (puisque B est une base de V) pour $i = 1, \ldots, r$. D'après la proposition 6.2, U n'est pas un ensemble linéairement indépendant, ce qui contredit l'hypothèse.

Puisque U est minimal, il existe $i \in \{k+1, \ldots, n\}$ tel que $\mathbf{u}^{(i)} \notin \mathrm{Vect}\left(U \backslash \{\mathbf{v}^{(1)}\}\right)$. Sinon, $\mathrm{Vect}\left(U \backslash \{\mathbf{v}^{(1)}\}\right) = V$, ce qui implique que U n'est pas minimal.

Nous montrons que $U' = (U \backslash \{\mathbf{v}^{(1)}\}) \cup \{\mathbf{u}^{(i)}\}$ est un ensemble linéairement indépendant.

Supposons, au contraire, qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$, non tous nuls tels que

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{u}^{(j)} + \alpha_1 \mathbf{u}^{(i)} + \sum_{j=2}^{r} \alpha_j \mathbf{v}^{(j)} = \mathbf{0}.$$

Notons que $\alpha_1 \neq 0$ puisque $U \backslash \{\mathbf{u}^{(i)}\}$ est linéairement indépendant. Ainsi,

$$\mathbf{u}^{(i)} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_1^{-1}(-\lambda_j)\mathbf{u}^{(j)} + \sum_{j=2}^{r} \alpha_1^{-1}(-\alpha_j)\mathbf{v}^{(j)},$$

et $\mathbf{u}^{(i)}$, ce qui est une contradiction. Donc, U' est linéairement indépendant. Mais la cardinalité de U' est m et U' possède un élément supplémentaire en commun avec B, ce qui contredit notre choix de U. □

Ce résultat à un important corollaire.

Corollaire 6.1. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Alors chaque base de V possède le même nombre de vecteurs.*

Démonstration. Puisque V n'est pas de dimension infinie, il existe une base B avec un nombre fini d'éléments. Soit B' une base arbitraire de V. D'après le théorème 6.1, $|B'| \leq |B|$. Donc B' doit aussi être un ensemble fini. On applique le théorème 6.1 une seconde fois afin d'obtenir $|B| \leq |B'|$, d'où $|B'| = |B|$, tel que désiré. □

Le nombre de vecteurs que contient toute base de V est la **dimension** de V, dénotée par $\dim(V)$. Par exemple, la dimension de $\mathbb{R}^n$ est n, et la dimension de $P_2(\mathbb{R})$ est 3. Un espace vectoriel qui ne contient que le vecteur nul est de dimension 0.

Exercices

1. Soit $\mathbb{K}$ un corps. Produisez une base de $\mathbb{K}^4$.
2. Produisez une base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
3. Quel est la dimension de l'espace des polynômes en x à coefficients réels et de degré au plus 3?

Solutions

1. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.
2. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.
3. La dimension est 4 puisque $\{1, x, x^2, x^3\}$ est une base de l'ensemble en question.

6.9 Dimensions de sous-espaces

Dans cette section, nous prouvons le résultat suivant:

Théorème 6.2. *Soit $(V, \mathbb{K})$ un espace vectoriel de dimension n. Si W est un sous-espace de V, alors $\dim(W) \leq n$. De plus, l'inégalité est stricte si et seulement si W est un sous-espace propre.*

Avant de montrer le résultat, nous allons établir quelques résultats intermédiaires.

Proposition 6.3. *Soit $(V, \mathbb{K})$ un espace vectoriel. Supposons que $\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}$ soient des vecteurs linéairement indépendants de V. Si $\mathbf{u} \in V$ et $\mathbf{u} \notin \operatorname{Vect}\left(\left\{\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}\right\}\right)$, alors $\left\{\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}\right\}$ est linéairement indépendant.*

Démonstration. Supposons par contradiction que $\left\{\mathbf{u}, \mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}\right\}$ ne soit pas un ensemble linéairement indépendant. Alors il existe des scalaires $\mu, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, non tous nuls tels que tel que

$$\mu\mathbf{u} + \lambda_1\mathbf{v}^{(1)} + \cdots + \lambda_m\mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{0}_V. \tag{6.1}$$

Notons que $\mu \neq 0$; autrement l'équation

$$\lambda_1\mathbf{v}^{(1)} + \cdots + \lambda_m\mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{0}_V$$

aurait une solution non triviale, ce qui contredit l'indépendence linéaire de $\{\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}\}$. On peut ainsi réécrire l'équation (6.1) sous la forme

$$\mathbf{u} = \mu^{-1}(-\lambda_1)\mathbf{v}^{(1)} + \cdots + \mu^{-1}(-\lambda_k)\mathbf{v}^{(k)},$$

ce qui est impossible puisque $\mathbf{u} \notin \operatorname{Vect}\left(\left\{\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}\right\}\right)$ par hypothèse. □

Corollaire 6.2. *Soit V un espace vectoriel de dimension n. Si $B \subseteq V$ est un ensemble linéairement indépendant tel que $|B| = n$, alors B est une base de V.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $\mathbf{u} \in V$ tel que $\mathbf{u} \notin \operatorname{Vect}(B)$. D'après la proposition 6.3, $B \cup \{\mathbf{u}\}$ est un ensemble linéairement indépendant dont la cardinalité est $n+1$, ce qui est impossible d'après le théorème 6.1. □

Corollaire 6.3. *Soit V un espace vectoriel de dimension n. Si $\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)} \in V$ sont linéairement indépendants et $k < n$, alors il existe des $\mathbf{v}^{(k+1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)} \in V$ tels que $\{\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}\}$ est une base de V.*

Démonstration. On applique la proposition 6.3 jusqu'à l'obtention d'un ensemble linéairement indépendant de cardinalité n. Selon le corollaire 6.2, l'ensemble obtenu est une base de V. □

Nous sommes maintenant prêts à démontrer le résultat principal.

Démonstration. (Le théorème 6.2) Soit $\{\mathbf{w}^{(1)}, \ldots, \mathbf{w}^{(m)}\}$ une base de W, $m = \dim(W)$. Comme W est un sous-espace de V, $\{\mathbf{w}^{(1)}, \ldots, \mathbf{w}^{(m)}\}$ est un ensemble linéairement indépendant de V. D'après le corollaire 6.3, on peut construire une base $\{\mathbf{w}^{(1)}, \ldots, \mathbf{w}^{(m)}, \mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)}\}$ de V. Alors $m + k = n$. Puisque $k \geq 0$, on obtient $m \leq n$.

Si $m < n$, W est évidemment un sous-espace propre de V puisque $\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)} \not\in W$. Si $m = n$, alors toute base de W est aussi une base pour V, d'après le corollaire 6.2, ce qui implique que $W = V$. Donc, $m < n$ si et seulement si W est un sous-espace propre de V. □

Exemple 6.17. Supposons que l'on nous demande de construire une base de $\mathbb{K}^3$ contenant $U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$. Puisque $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ et que U contient déjà deux vecteurs linéairement indépendants, nous n'avons qu'à trouver un vecteur de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas dans l'espace engendré par U. La question demeure: comment trouver un tel vecteur lorsqu'il y a une infinité de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ parmi lesquels choisir?

Observons que puisque $\mathbb{R}^3$ est engendré par $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, il doit y avoir au moins un vecteur dans l'ensemble qui ne peut être écrit en tant que combinaison linéaire de vecteurs de U, sinon, $\mathrm{Vect}\,(U) = \mathbb{R}^3$, ce qui est impossible car il n'y a que deux vecteurs dans U.

Autrement dit, nous essayons de résoudre $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, où les colonnes de $\mathbf{A}$ sont les the vecteurs de U et $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, pour chaque $\mathbf{b}$ dans $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Puisque les trois systèmes ont la même matrice de coefficients, nous pouvons simplement réduire la matrice augmentée:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

En échangeant les lignes 1 et 2, on obtient

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

L'application de $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donne

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Finalement, l'application de $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ donne

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Dans la ligne du bas, on voit qu'aucun des trois vecteurs ne peut s'écrire en tant que combinaison linéaire de vecteurs de U, ce qui veut dire que l'on peut ajouter n'importe lequel des trois à U. L'ensemble obtenu a trois vecteurs linéairement indépendants et l'espace qu'il engendre est automatiquement $\mathbb{R}^3$, selon le corollaire 6.2.

Exercices

1. Construire une base de $P_2(\mathbb{R})$ contenant $\{x - 1, x^2 - x + 2\}$.
2. Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace propre de $\mathbb{R}^{2\times 3}$?

Solutions

1. Nous n'avons besoin que d'un vecteur de $P_2(\mathbb{R})$ qui ne puisse s'écrire en tant que combinaison linéaire de $x-1$ et x^2-x+2. Le polynôme constant 1 fait l'affaire.
2. 5.

6.10 Retour sur le noyau d'une matrice

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ une matrice sous forme échelonnée réduite. Rappelons que l'on peut obtenir toutes les solutions de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ en remplaçant les variables libres par des paramètres distincts. L'ensemble solution peut être décrit par une combinaison linéaire de n-uplets, où les paramètres sont les scalaires. Ces n-uplets forment une base du noyau de $\mathbf{A}$. La dimension du noyau de $\mathbf{A}$, que l'on nomme la **nullité de** $\mathbf{A}$, est le nombre de colonnes qui ne sont pas des pivots de $\mathbf{A}$.

Considérons l'exemple suivant. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ donné par $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. En appliquant les opérations élémentaires sur les lignes suivantes, nous obtenons la FER de $\mathbf{A}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

On lit aisément toutes les solutions de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$: Puisque x_2 et x_4 sont les variables libres, posons $x_2 = s$ et $x_4 = t$. Ainsi, les solutions sont données par

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s - 2t \\ s \\ t \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

et $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ est une base de $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$, d'où $\dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{A})) = 2$.

Remarque. Notons que l'on peut aussi obtenir directement le premier vecteur en posant $x_2 = 1$, $x_4 = 0$, et en résolvant pour x_1 et x_3, et le deuxième vecteur en posant $x_2 = 0$, $x_4 = 1$ et résolvant pour x_1 et x_3. En général, si $\mathbf{A}$ est une FER, alors une base pour $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ peut être construite en suivant les étapes suivantes: i) soit $\{i_1, \ldots, i_l\}$ les indices correspondants aux colonnes libres de $\mathbf{A}$. ii) Pour chaque $k \in \{1, \ldots, l\}$, on résoud

$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ en choisissant $x_{i_k} = 1$, et $x_{i_j} = 0$ pour tout $j \neq k$. Dénotons cette solution par $\mathbf{u}^{(1)}$. iii) L'ensemble $\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)}\}$ est une base de $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$.

Exercices

1. Trouvez une base du noyau de $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
2. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ qui prend ses éléments dans $GF(2)$. Donnez une base de $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$.

Solutions

1. Plusieurs réponses sont possibles. En voici une: $\left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

2. Nous trouvons d'abord toutes les solutions de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, où $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix}$, en réduisant $\mathbf{A}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Puisque les deux dernières colonnes sont les seules colonnes libres, on pose $x_4 = s$ et $x_5 = t$. Les solutions $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ sont données par

$$\begin{bmatrix} s \\ s \\ s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

où $s, t \in GF(2)$. Ainsi $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ est une base de $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$.

6.11 Espace des colonnes et espace des lignes

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, où $\mathbb{K}$ est un corps. Nous avons vu que $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$, le noyau de $\mathbf{A}$, est défini par $\{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n \,:\, \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$. Nous allons maintenant discuter de deux autres espaces vectoriels associés à $\mathbf{A}$.

L'espace des colonnes de $\mathbf{A}$, dénoté par $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$, est **l'espace engendré par les colonnes de** $\mathbf{A}$, c'est-à-dire que l'on traite les colonnes de $\mathbf{A}$ comme des vecteurs de $\mathbb{K}^m$ et que l'on considère toutes les combinaisons linéaires possibles des ces vecteurs. Ainsi, $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ est un sous-espace de $\mathbb{K}^m$.

Exemple 6.18. Considérons la matrice réelle $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. L'espace des colonnes de $\mathbf{A}$ contient tous les vecteurs de la forme $\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. En réécrivant $\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ sous la forme $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$, on obtient

$$\mathrm{Col}(\mathbf{A}) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \,:\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

Conséquemment, $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ appartient à $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ si et seulement si le système $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ admet a une solution en α, β, γ.

L'espace des lignes de $\mathbf{A}$, dénoté par $\mathrm{Lgn}(\mathbf{A})$, s'obtient à partir de $\mathrm{Col}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$. Ainsi, $\mathrm{Lgn}(\mathbf{A})$ est un sous-espace de $\mathbb{K}^n$.

6.11.1 Bases de l'espace des colonnes et de l'espace des lignes

Nous allons voir comment obtenir une base de l'espace des lignes et une base de l'espace des colonnes. Considérons d'abord le cas où la matrice est sous forme échelonnée réduite.

6.11.1.1 Matrice sous forme échelonnée réduite

Considérons $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Supposons que l'on cherche une base de $\mathrm{Lgn}(\mathbf{A})$.

Puisque $\mathbf{A}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, l'espace engendré par les deux premières colonnes est identique à
l'espace des colonnes de $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ (la troisième colonne, dont tous les éléments sont nuls ne contribue aucunement aux combinaisons linéaires).

Notons que chacune des deux première colonnes est nécessaire à la construction de $\mathrm{Col}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ puisqu'elles sont linéairement indépendantes. Ainsi, les deux premières colonnes de $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ forment une base de $\mathrm{Lgn}(\mathbf{A})$.

Trouvons maintenant une base pour $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$. Notons que $\mathbf{A}_2$, la deuxième colonne de $\mathbf{A}$, est un multiple de $\mathbf{A}_1$. De plus, $\mathbf{A}_4 = -\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_3$. Ainsi, l'espace engendré par $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3\}$ correspond à $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$. De plus, $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3\}$ est un ensemble linéairement indépendant. C'est donc une base de $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$.

Pour une matrice $\mathbf{A}$ sous forme échelonnée réduite, les colonnes non nulles de $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ forment une base de $\mathrm{Lgn}(\mathbf{A})$ et les colonnes pivot de $\mathbf{A}$ forment une base de $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$.

6.11.1.2 Matrice générale

On se sert du résultat suivant.

Proposition 6.4. *Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des matrices telles que $\mathbf{B}$ peut être obtenue de $\mathbf{A}$ à l'aide d'une suite d'opérations élémentaires sur les lignes, alors $\mathrm{Lgn}(\mathbf{A}) = \mathrm{Lgn}(\mathbf{B})$.*

On laisse la démonstration en exercice.

Pour une matrice donnée $\mathbf{A}$, on calcule d'abord sa forme échelonnée réduite $\mathbf{R}$ (en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes). Une base de $\mathrm{Lgn}(\mathbf{R})$ est alors une base de $\mathrm{Lgn}(\mathbf{A})$.

Les opérations élémentaires sur les lignes *affectent* l'espace des colonnes, cependant. Mais nous pouvons tout de même utiliser la réduction de $\mathbf{A}$ afin de nous aider à trouver une base de $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$.

Proposition 6.5. *Si $\mathbf{R}$ est la forme échelonnée réduite de $\mathbf{A}$, les colonnes de $\mathbf{A}$ correspondant aux colonnes pivots de $\mathbf{R}$ forment une base de $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$.*

Exemple 6.19. Considérons la matrice réelle $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ de forme éche-

lonnée réduite de $\mathbf{A}$ est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Puisque $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ sont les colonnes pivots de $\mathbf{A}$, elle forment une base de $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$. De plus, $\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2$ et $\mathbf{A}_4 = \mathbf{A}_1$.

Exercices

1. Pour chacune des matrices réelles suivantes, trouvez une base du noyau, une base de l'espace des lignes et une base de l'espace des colonnes.

   a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Solutions

1. a. $\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ est une base possible base du noyau;

$\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right\}$ est une base de l'espace des lignes.

$\left\{\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\right\}$ est une base de l'espace des colonnes.

b. Notons que la FER de la matrice est $\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\0 & 1 & -1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

$\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ est une base possible du noyau.

$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$ est une base possible de l'espace des lignes.

$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ est une base possible de l'espace des colonnes.

6.12 Rang d'une matrice

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $\mathbb{K}$ un corps. Il est possible de démontrer que $\dim(\mathrm{Col}(\mathbf{A})) = \dim(\mathrm{Lgn}(\mathbf{A}))$. La dimension de l'espace des lignes ou de l'espace des colonnes de $\mathbf{A}$ est appelé le **rang** de $\mathbf{A}$, que l'on dénote par $\mathrm{rang}\,(\mathbf{A})$. Ainsi, la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ est de $\mathrm{rang}\,(\mathbf{A}) = 2$.

Si $\mathrm{rang}\,(\mathbf{A}) = \min(m, n)$, on dit que $\mathbf{A}$ est **de plein rang**.

La **nullité** de $\mathbf{A}$, dénoté par $\mathrm{null}\,(\mathbf{A})$, est la dimension du noyau de $\mathbf{A}$. L'important résultat suivant fait un lien entre la nullité et le rang de $\mathbf{A}$:

Théorème 6.3 (Théorème du rang)**.** *Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $\mathbb{K}$ un corps. Alors*

$$\mathrm{rang}\,(\mathbf{A}) + \mathrm{null}\,(\mathbf{A}) = n.$$

Démonstration. Rappelons que les opérations élémentaires sur les lignes n'affectent pas ni l'espace des lignes ni le noyau de $\mathbf{A}$. Soit $\mathbf{R}$ la matrice forme échelonnée réduite obtenue de $\mathbf{A}$ par des opérations élémentaires sur les lignes. Alors, $\mathrm{rang}\,(\mathbf{A}) = \mathrm{rang}\,(\mathbf{R})$ et $\mathrm{null}\,(\mathbf{A}) = \mathrm{null}\,(\mathbf{R})$.

Soit k le nombre de pivots de $\mathbf{R}$. La dimension de l'espace des lignes de $\mathbf{R}$ est alor k et la dimension du noyau de $\mathbf{R}$ et $n - k$, le nombre de colonnes libres de $\mathbf{R}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{rang}\,(\mathbf{A}) + \mathrm{null}\,(\mathbf{A}) &= \mathrm{rang}\,(\mathbf{R}) + \mathrm{null}\,(\mathbf{R}) \\ &= k + (n - k) = n, \end{aligned}$$

d'où le résultat recherché. □

Exercices

1. Calculez le rang de $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
2. Est-ce que la nullité d'une matrice réelle de taille 4×5 peut être 0?
3. Soient $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ des matrices réelles. Déterminez si $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \mathrm{Col}(\mathbf{B})$.

Solutions

1. La FER est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, d'où elle est de rang 2.
2. Non. Le rang d'une matrice 4×5 est la dimension de l'espace des colonnes. Puisque l'espace des colonnes d'une telle matrice est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$, cette dimension est inférieure ou égale 4. Ainsi, d'après le théorème 6.3, la nullité est supérieure ou égale 1.
3. Notons premièrement que $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$. Ainsi, chaque colonne de $\mathbf{B}$ appartient à $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$, ce qui implique que $\mathrm{Col}(\mathbf{B})$ est un sous-espace de $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$. La FER de $\mathbf{B}$ est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, d'où $\mathbf{B}$ est de rang 2 et l'espace des colonnes de $\mathbf{B}$ est de dimension 2. La FER de $\mathbf{A}$ est $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, d'où $\mathbf{A}$ est de rang 1. D'après le théorème 6.3, la nullité de $\mathbf{A}$ est 2. Ainsi, $\dim(\mathrm{Col}(\mathbf{B})) = \dim \mathrm{Ker}(\mathbf{A}))$. Puisque $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ est un sous-espace de $\mathrm{Col}(\mathbf{B})$, ils doivent donc être égaux d'après le théorème 6.2.

6.13 Représentation par les uplets

6.13.1 Bases ordonnées

Soient $(V, \mathbb{K})$ un espace vectoriel de dimension n et $\{\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}\}$ une base de V. On appelle $(\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)})$ une **base ordonnée** de V.

En imposant un ordre sur les éléments de la base, on peut représenter chaque vecteur de V en tant que n-uplet. Plus précisément, soit $\mathbf{u} \in V$. Rappelons qu'il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{v}^{(1)} + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}^{(n)}$.

On défini $[\mathbf{u}]_{(\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)})}$ par le n-uplet $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$.

On appelle $[\mathbf{u}]_{(\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)})}$ une **représentation par uplet** (ou **représentation en coordonnées**) de $\mathbf{u}$ par rapport à la base ordonnée $(\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)})$.

Évidemment, si on choisit une base ordonnée différente, on obtient une représentation différente du même vecteur. Voilà pourquoi il est important de préciser la base ordonnée lorsqu'on utilise une représentation par les uplets.

Exemple 6.20. Notons que $\Gamma = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$ est une base ordonnée de $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Nous voulons obtenir $[\mathbf{u}]_\Gamma$.

On écrit d'abord $\mathbf{u}$ en tant que combinaison linéaire des éléments de Γ, c'est-à-dire que l'on cherche des nombres réels α et β tels que $\mathbf{u} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Nous devons résoudre

$$\begin{aligned} 3 &= \alpha + 2\beta \\ 2 &= -\alpha + 3\beta, \end{aligned}$$

qui a pour solution $\alpha = 1$ et $\beta = 1$. Ainsi, $[\mathbf{u}]_\Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Exemple 6.21. Soit $V = P_2(\mathbb{R})$. Soient Γ et Ω les bases ordonnées $\Gamma = (1, x+1, x^2+1)$ et $\Omega = (x-1, x^2+1, x^2-1)$. (Vérifiez que ce sont bien des bases ordonnées.) Nous voulons trouver la représentation par les uplets du polynôme x par rapport à ces bases ordonnées.

Afin de déterminer $[x]_\Gamma$, nous devons trouver des réels α, β, γ tels que

$$x = \alpha(1) + \beta(x+1) + \gamma(x^2+1).$$

En simplifiant à droite, on obtient

$$x = \gamma x^2 + \beta x + (\alpha + \beta + \gamma).$$

Puisque le côté gauche ne possède aucun terme de degré 2, on doit avoir $\gamma = 0$. En comparant les coefficients de x des deux côtés, on obtient $\beta = 1$. Puisque le côté gauche n'a pas de terme constant, on doit avoir $\alpha = -1$. Autrement dit, $x = (-1)1 + 1(x+1) + 0x^2$, et $[x]_\Gamma = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Pour $[x]_\Omega$, on note que $x = 1(x-1) + \frac{1}{2}(x^2+1) + \left(-\frac{1}{2}\right)(x^2)$, d'où $[x]_\Omega = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

6.13.2 Utilisation des représentations par les uplets

Si $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$ et Γ est une base ordonnée de V, on peut rapidement vérifier que

$$[\mathbf{u} + \mathbf{w}]_\Gamma = [\mathbf{u}]_\Gamma + [\mathbf{w}]_\Gamma.$$

De même, si λ est un scalaire, alors

$$[\lambda \mathbf{u}]_\Gamma = \lambda [\mathbf{u}]_\Gamma.$$

On peut passer d'un espace vectoriel de dimension finie à $\mathbb{K}^n$: toutes les opération sont préservées.

Exercices

1. Soient $\Gamma = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$ et $\Omega = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$ deux bases ordonnées de $\mathbb{R}^2$.

   a. Soient $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Exprimez les représentations suivantes:

      i. $[\mathbf{u}]_\Gamma$
      ii. $[\mathbf{u}]_\Omega$
      iii. $[\mathbf{v}]_\Gamma$
      iv. $[\mathbf{v}]_\Omega$

   b. Trouvez une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ telle que $[\mathbf{v}]_\Omega = \mathbf{A}[\mathbf{v}]_\Gamma$ pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$.

Solutions

1. a. i. $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

   ii. $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

   iii. $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

   iv. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$

6.14 Changement de base

6.14.1 Motivation

Nous avons vu que le même espace vectoriel peut être décrit à l'aide de bases distinctes. Lorsque l'on en choisi une, chaque vecteur de l'espace vectoriel peut s'exprimer en tant que combinaison linéaire des vecteurs de cette base. Y a-t-il vraiment un besoin d'utiliser des bases différentes?

Le choix d'une base est très important pour les algorithmes utilisés lors de la compression audio digitale et la compression d'images. Par exemple, la base d'ondelettes est largement utilisée en traitement des signaux digitales. La transformée de Fourier rapide est une méthode de changement de base efficace permettant d'exprimer une matrice en terme d'ondelettes.

Les changements de bases sont aussi fréquemment utilisés en analyse statistique, plus particulièrement en analyse des composantes principales.

Nous illustrons maintenant l'usage des changements de base par un exemple simple. Considérons la table suivante indiquant les nombres d'heures hebdomadaire que cinq élèves (Ada, Bev, Cam, Dan et Ève) passent à étudier, ainsi que leurs notes en algèbre, en calcul et en statistiques.

	Ada	Bev	Cam	Dan	Ève
Heures d'études	3	8.5	6	5	7
Note en algèbre	45	100	75	65	85
Note en calcul	56	100	80	72	88
Note en statistique	48	81	66	60	72

En réalité, nous pourrions avoir des centaines d'étudiants et plusieurs autres sujets. Mais pour les besoins de l'illustration, nous supposons que le tableau ci-haut est trop gros à télécharger dans un ordinateur pour ensuite être analysé. Existe-t-il une façon de compresser les données?

Exprimons d'abord les données en 4-uplets dans $\mathbb{R}^4$ comme suit:

	Ada	Bev	Cam	Dan	Ève
Données	$\begin{bmatrix} 3 \\ 45 \\ 56 \\ 48 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8.5 \\ 100 \\ 100 \\ 81 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 \\ 75 \\ 80 \\ 66 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 65 \\ 72 \\ 60 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 85 \\ 88 \\ 72 \end{bmatrix}$

Nous n'avons pas encore réduit la quantité de données. Nous avons seulement réécrit le tableau d'une façon différente. Avec $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \\ 32 \\ 30 \end{bmatrix}$, nous voyons que

- l'uplet d'Ada est donné par $\mathbf{v} + 3\mathbf{d}$,
- l'uplet de Bev est donné par $\mathbf{v} + 8.5\mathbf{d}$,
- l'uplet de Cam est donné par $\mathbf{v} + 6\mathbf{d}$,
- l'uplet de Dan est donné par $\mathbf{v} + 5\mathbf{d}$,
- l'uplet d'Ève est donné par $\mathbf{v} + 7\mathbf{d}$.

Ainsi, les multiples scalaires de $\mathbf{d}$ capturent toutes la variation des données.

D'après le corollaire 6.3, on peut construire une base $B = \{\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)}, \mathbf{d}\}$ de $\mathbb{R}^4$. Nous savons que chaque vecteur de $\mathbb{R}^4$ peut s'écrire en tant que combinaison linéaire de $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)}$ et $\mathbf{d}$. Ce qui est spécial à propos des 4-uplets du tableau précédent, c'est que pour n'importe quel 4-uplet $\mathbf{u}$, la combinaison linéaire de $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)}$, et $\mathbf{d}$ qui exprime $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ sera de la forme $0\mathbf{v}^{(1)} + 0\mathbf{v}^{(2)} + 0\mathbf{v}^{(3)} + \alpha\mathbf{d}$, où $\alpha \neq 0$. Essentiellement, une seule des quatres dimensions est intéressante par rapport à la base B.

Remarque. En réalité, les données ne permettent que rarement un ajustement parfait avec un modèle aussi simple. Il est plus probable que les données auraient une forme comme celle-ci:

	Ada	Bev	Cam	Dan	Ève
Heures d'études	3	8.5	6	5	7
Note d'algèbre	47	100	74	64	87
Note en calcul	55	99	80	73	89
Note en statistiques	50	80	65	59	73

Même si nous ne pouvons pas trouver un $\mathbf{v}$ et un $\mathbf{d}$ qui correspondent parfaitement aux données, nous pouvons trouver des approximations. Pour des raisons pratiques, une

approximation est souvent suffisante. Comme George E.P. Box l'a déjà écrit, « Tous les modèles sont essentiellement incorrects. Mais certains modèles sont utiles. » Une bonne analyse statistique requiert un bon modèle pour les données disponibles, ainsi que la capacité de déterminer que s'il suggère une bonne approximation à la réalité.

6.14.2 Matrice de changement de base

Comme nous l'avons vu à la section précédente, il peut s'avérer avantageux dans certaines situations d'exprimer un vecteurs à l'aide d'une base différente. Par exemple, dans un espace vectoriel à dimension élévée, s'il existe une base ordonnée dans laquelle les représentations en uplets de vecteurs à l'étude n'ont que peu de composantes non nulles, on peut possiblement sauver de la mémoire en utilisant une représentations qui ne contient que peu d'information sur ces uplets.

Dans cette section, nous présentons une manière systématique de convertir la représentation par rapport à une base ordonnée à la représentation par rapport à une autre base ordonnée. Nous illustrons d'abord les idées principales avec un exemple.

Soit P_1 l'espace des polynômes en x à coefficients réels et de degré au plus 1. Soient $\Gamma = (x-1, x+1)$ et $\Omega = (1, 2x+1)$ des bases ordonnées de P_1.

Rappelons que si $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ est une représentation en 2-uplets de $\mathbf{u} \in P_1$ par rapport à Γ, alors

$$\mathbf{u} = a(x-1) + b(x+1) = (a+b)x + (-a+b).$$

Existe-t-il une façon simple de déterminer $[\mathbf{u}]_\Omega$?

Nous devons trouver δ et ϕ tels que $\delta(1) + \phi(2x+1) = \mathbf{u} = (a+b)x + (-a+b)$. Nous aurons alors $[\mathbf{u}]_\Omega = \begin{bmatrix} \delta \\ \phi \end{bmatrix}$.

Notons que

$$\delta(1) + \phi(2x+1) = 2\phi x + (\delta + \phi).$$

En comparant ces coefficients avec $(a+b)x + (-a+b)$, on obtient

$$\begin{aligned} 2\phi &= (a+b) \\ \delta + \phi &= -a+b \end{aligned}$$

De la première équation, on obtient $\phi = \frac{a+b}{2}$. On substitue ce ϕ dans la deuxième équation afin d'obtenir $\delta = -\frac{3}{2}a + \frac{b}{2}$. Ainsi,

$$[\mathbf{u}]_\Omega = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}a + \frac{b}{2} \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \end{bmatrix}.$$

On peut aussi écrire ce résultat sous la forme

$$[\mathbf{u}]_\Omega = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ est telle que

$$[\mathbf{u}]_\Omega = \mathbf{A}[\mathbf{u}]_\Gamma;$$

elle transforme la représentation en 2-uplets par rapport à Γ en représentation par 2-uplets par rapport à Ω.

Dans ce qui suit, nous allons voir que pour tout espace vectoriel V de dimension n duquel Γ et Ω sont des bases ordonnées, il existe une unique matrice $\mathbf{A}$ telle que $[\mathbf{u}]_\Omega = \mathbf{A}[\mathbf{u}]_\Gamma$ pour chaque $\mathbf{u} \in V$. Le changement de base des représentations en uplets est donc équivalent à la multiplication par une matrice.

Soit V un espace vectoriel de dimension n. Soient $\Gamma = \left(\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}\right)$ et $\Omega = \left(\mathbf{w}^{(1)}, \ldots, \mathbf{w}^{(n)}\right)$ des bases ordonnées de V.

Notons que pour chaque $j \in \{1, \ldots, n\}$, on peut écrire $\mathbf{v}^{(j)}$ en tant que combinaison linéaire de $\mathbf{w}^{(1)}, \ldots, \mathbf{w}^{(n)}$. Ainsi, il existe scalaires $a_{1,j}, a_{2,j}, \ldots, a_{n,j}$ tels que

$$\mathbf{v}^{(j)} = a_{1,j}\mathbf{w}^{(1)} + a_{2,j}\mathbf{w}^{(2)} + \cdots + a_{n,j}\mathbf{w}^{(n)}.$$

Si $\mathbf{u} \in V$ est arbitraire, il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{v}^{(1)} + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}^{(n)}$, d'où $[\mathbf{u}]_\Gamma = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \lambda_1\mathbf{v}^{(1)} + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}^{(n)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\mathbf{w}^{(i)} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (a_{i,j}\lambda_j)\mathbf{w}^{(i)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\lambda_j \right) \mathbf{w}^{(i)} \end{aligned}$$

et

$$[\mathbf{u}]_\Omega = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\lambda_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2,j}\lambda_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{m,j}\lambda_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Soit $\mathbf{A}$ la matrice dont l'élément (i, j) est $a_{i,j}$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. La représentation $[\mathbf{u}]_\Omega$ est précisement $\mathbf{A}[\mathbf{u}]_\Gamma$. One appelle $\mathbf{A}$ la matrice de **changement de base** de Γ à Ω.

Exemple 6.22. Soient $\Gamma = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ et $\Omega = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ des bases ordonnées de $\mathbb{R}^2$. Pour obtenir la matrice de changement de base de Γ à Ω, on écrit d'abord chaque vecteur de Γ en tant que combinaison linéaire des vecteurs de Ω.

Notons que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, la matrice de changement de base de Γ à Ω est $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$.

Exercices

1. Soient $\Gamma = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$ et $\Omega = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$ des bases ordonnées de $\mathbb{R}^3$. Obtenez la matrice de changement de base de Γ à Ω.
2. Soient $\Gamma = (x, 1)$ et $\Omega = (2x + 1, -x)$ des bases ordonnée de P_1. Obtenez la matrice de changement de base de Γ à Ω.

Solutions

1. Notons que
$$\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},$$
et
$$\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}.$$
Ainsi, la matrice de changement de base est
$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}.$$

2. Notons que
$$x = 0(x+1) + (-1)(-x)$$
et
$$1 = 1(2x+1) + 2(-x).$$
Ainsi, la matrice de changement de base est $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$.

6.15 Exemple de test portant sur la matière de ce chapitre

1. Montrez que $\text{Vect}\left(\left\{\begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \end{bmatrix}\right\}\right) = \mathbb{C}^2$.
2. Est-ce que $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ appartient à le sous-espace de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ engendré par $\left\{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$?
3. Soient $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ les matrices $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, et $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Donnez une description économe de l'espace engendré par $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$.
4. Montrez que l'espace engendré par $\{x, x^2-1\}$ est un sous-espace propre de $P_2(\mathbb{R})$.
5. Déterminez si x^2+1 est dans l'espace engendré par $\{x^2+x+1, x+2\}$, où les scalaires sont les nombres réels.
6. Soient $\mathbf{p}^{(1)} = -x+1$, $\mathbf{p}^{(2)} = x+2$, et $\mathbf{p}^{(3)} = x^2+1$.
   a. Montrez que $\{\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}, \mathbf{p}^{(3)}\}$ est une base de $P_2(\mathbb{R})$.
   b. Écrivez x^2+2x en tant que combinaison linéaire de $\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}, \mathbf{p}^{(3)}$.
7. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ une matrice réelle. Est-ce que $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ appartient à $\text{Col}(\mathbf{A})$?
8. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$. Quelle est la plus petite valeur possible de la nullité de $\mathbf{A}$?
9. Soient $\Gamma = (x^2-1, x+1, x)$ une base ordonnée de $P_2(\mathbb{R})$ et $\mathbf{u} = x-1$. Déterminez $[\mathbf{u}]_\Gamma$.
10. Déterminez la dimension du sous-espace de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ donné par $\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : \begin{array}{r} a+b+c+d=0 \\ b-c+2d=0 \end{array}\right\}$.
11. Soient $\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ les vecteurs $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Soit W le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\{\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$. Montrez que W est un sous-espace propre de $\mathbb{R}^3$.

Solutions

1. Il suffit de démontrer que pour tout choix de $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^2$, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $\alpha \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$.

   L'équation peut être écrite sous la forme $\begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$.

   La matrice augmentée du système est $\left[\begin{array}{cc|c} i & 1 & z_1 \\ 0 & 1-i & z_2 \end{array}\right]$.

   Il serait possible de réduire la matrice mais la deuxième ligne représente l'équation $(1-i)\beta = z_2$, que l'on résoud aisément, et $\beta = \frac{z_2}{1-i} = \frac{1+i}{2} z_2$.

   En substituant ce β dans l'équation correspondante à la première ligne, on obient $i\alpha + \frac{1+i}{2} z_2 = z_1$, ce qui implique $\alpha = -i\left(z_1 - \frac{1+i}{2} z_2\right) = -iz_1 + \frac{-1+i}{2} z_2$. Donc, une solution existe peu importe les valeurs de z_1, z_2.

   (Il n'y a aucun besoin de résoudre pour α et β explicitement. La matrice des coefficients est carrée et a pour déterminant $i(1-i) \neq 0$. Par la règle de Cramer, une solution unique existe et c'est tout ce dont nous avons besoin pour notre conclusion.)

2. Nous aimerions déterminer s'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   On peut réécrire le côté droit afin d'obtenir

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a+c & a+b+c \\ a+b+c & -a+2b \end{bmatrix}.$$

   En comparant les éléments de chaque côté, on obtient le système

$$\begin{aligned} 3a + c &= 1 \\ a + b + c &= 0 \\ a + b + c &= 0 \\ -a + 2b &= 1. \end{aligned}$$

   La FER de la matrice augmentée du système est

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Il y a donc une solution unique ($a = 1$ et $c = -2$) et la réponse à la question est « oui ».

3. Par définition, l'espace engendré par $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ est

$$\begin{aligned} &\{\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B} + \gamma\mathbf{C} \,:\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} \\ = \; &\left\{ \begin{bmatrix} \alpha - \beta & \alpha + \gamma \\ \alpha + \beta + \gamma & 0 \end{bmatrix} \,:\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Cet espace est identique à $\left\{ \begin{bmatrix} r & s \\ t & 0 \end{bmatrix} \,:\, r, s, t \in \mathbb{R} \right\}$. En effet, le système

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= r \\ \alpha + \gamma &= s \\ \alpha + \beta + \gamma &= t \end{aligned}$$

admet une solution, indépendamment du choix de $r, s, t \in \mathbb{R}$, donnée par $\alpha = r - s + t$, $\beta = -s + t$, et $\gamma = -r + 2s - t$. L'espace en question contient toutes les matrices de la forme $\begin{bmatrix} r & s \\ t & 0 \end{bmatrix}$, où $r, s, t \in \mathbb{R}$.

4. Il suffit de trouver un vecteur de $P_2(\mathbb{R})$ qui ne peut s'écrire en tant que combinaison linéaire de x et $x^2 - 1$.

   Le polynôme x^2 est un tel vecteur. Supposons, au contraire, qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 = \alpha x + \beta(x^2 - 1)$. Alors,

$$x^2 = \beta x^2 + \alpha x - \beta.$$

   En comparant les coefficients de x^2 de chaque côté, on obtient $\beta = 1$. Mais le terme de gauche n'a pas de constante tandis que le terme de droite en a une, $-\beta$. Ceci implique $\beta = 0$. Mais $\beta = 1$, une contradiction.

5. Par définition, $x^2 + 1$ appartient à l'espace engendré par $\{x^2 + x + 1, x + 2\}$ si et seulement s'il existe $\alpha, \beta \in RR$ tels que

$$x^2 + 1 = \alpha(x^2 + x + 1) + \beta(x + 2).$$

   En réécrivant le côté doit, on obtient

$$x^2 + 1 = \alpha x^2 + (\alpha + \beta)x + (\alpha + 2\beta).$$

   En comparant les coefficients de chaque côtés, on obtient le système

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha \\ 0 &= \alpha + \beta \\ 1 &= \alpha + 2\beta. \end{aligned}$$

Ainsi, $\alpha = 1$. La deuxième équation nous donne alors $\beta = -1$. Mais ceci veut dire que $\alpha + 2\beta = -1 \neq 1$, ce qui implique α et β ne peuvent exister. Ainsi, $x^2 + 1$ n'appartient pas à l'espace engendré par $\{x^2 + x + 1, x + 2\}$.

6. a. Nous montrons d'abord que $\text{Vect}\left(\{\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}, \mathbf{p}^{(3)}\}\right) = P_2(\mathbb{R})$. Pour ce faire, soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Nous devons montrer qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha\mathbf{p}^{(1)} + \beta\mathbf{p}^{(2)} + \gamma\mathbf{p}^{(3)} = ax^2 + bx + c.$$

La simplification à gauche donne

$$\gamma x^2 + (-\alpha + \beta)x + (\alpha + 2\beta + \gamma) = ax^2 + bx + c.$$

En comparant les coefficients de chaque côté, on obtient

$$\begin{aligned} \gamma &= a \\ -\alpha + \beta &= b \\ \alpha + 2\beta + \gamma &= c. \end{aligned}$$

Ce système admet la solution unique $\alpha = \frac{-a-2b+c}{3}$, $\beta = \frac{-a+b+c}{3}$. et $\gamma = a$.

Notons que le polynôme nul s'obtient avec $a = b = c = 0$. Mais ceci impose $\alpha = \beta = \gamma = 0$, d'où $\{\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}, \mathbf{p}^{(3)}\}$ est un ensemble linéairement indépendant. C'est donc une base de $P_2(\mathbb{R})$.

b. $x^2 + 2x = -\frac{5}{3}\mathbf{p}^{(1)} + \frac{1}{3}\mathbf{p}^{(2)} + \mathbf{p}^{(3)}$.

7. Notons que $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \text{Col}(\mathbf{A})$ si et seulement s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou, de façon équivalente,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ 2\beta \\ -\alpha \end{bmatrix}.$$

On voit aisément que le système n'admet pas de solution. Ainsi, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin \text{Col}(\mathbf{A})$.

8. Soient k la nullité de $\mathbf{A}$ et r son rang. D'après le théorème 6.3, on doit avoir $r + k = 4$. Le rang d'une matrice 2×4 est au plus 2 puisqu'en FER, il peut y avoir au plus deux pivots. Ainsi, $2 + k \geq r + k$ implique que $2 + k \geq 4$, d'où $k \geq 2$. Notons que la nullité peut être 2 (c'est le cas pour $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, par exemple.) La nullité de $\mathbf{A}$ doit donc être supérieure ou égale à 2.

9. Nous devons écrire $\mathbf{u}$ en tant que combinaison linéaire des éléments de la base ordonnée. Si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ sont tels que

$$\mathbf{u} = \alpha(x^2 - 1) + \beta(x + 1) + \gamma x,$$

alors, $[\mathbf{u}]_\Gamma = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$.

Cette équation peut se réécrire sous la forme

$$x - 1 = \alpha x^2 + (\beta + \gamma)x + (-\alpha + \beta).$$

En comparant les coefficients de chaque côté, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha \\ 1 &= \beta + \gamma \\ -1 &= -\alpha + \beta. \end{aligned}$$

Ce système admet la solution unique $\alpha = 0$. $\beta = -1$. et $\gamma = 2$, d'où $[\mathbf{u}]_\Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

10. De la deuxième équation, on voit que $b = c - 2d$. En substituant dans la première équation, on obtient $a = -2c + d$. Ainsi, le sous-espace, que l'on nomme W, peut être écrit sous la forme $\left\{ \begin{bmatrix} -2c + d & c - 2d \\ c & d \end{bmatrix} : c, d \in \mathbb{R} \right\}$.

Chaque matrice de W est alors une combinaison linéaire: $c \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, d'où W est l'espace engendré par $\left\{ \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Puisque les deux matrices ne sont pas des multiples scalaires l'une de l'autre, ils forment un ensemble linéairement indépendant et une base de W, d'où $\dim(W) = 2$.

11. Pour montrer que W est un sous-espace propre de $\mathbb{R}^3$, nous devons montrer qu'il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ qui n'appartient pas à W.

Cependant, nous n'allons pas essayer directement de trouver un tel $\mathbf{x}$. Nous allons plutôt montrer que la dimension de W est inférieure à 3. Puisque la dimension de $\mathbb{R}^3$ est 3, il s'ensuit que $W \neq \mathbb{R}^3$.

Rappelons que l'espace engendré par $\{\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ est donné par l'ensemble de combinaisons linéaires de $\mathbf{t}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$. Notons que si $\mathbf{A}$ est une matrice $\begin{bmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix}$, alors l'espace des colonnes de $\mathbf{A}$ est précisement l'ensemble des combinaisons linéaires de $\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. Donc, la dimension de l'espace engendré par $\{\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ est le rang de

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

En réduisant la matrice ci-dessus sous FER, on obtient

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Puisqu'il n'y a que deux colonnes pivots, le rang est 2.

Ainsi, la dimension de l'espace engendré par $\{\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ est 2, d'où $\dim(W) < 2$.

Chapitre 7

Valeurs propres et vecteurs propres

Ce chapitre introduit les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice carrée. Ces notions sont utilisées dans plusieurs applications, telles que la résolution d'équations différentielles, le traitement des signaux digitaux, la reconnaissance faciale, l'algorithme original PageRank de Google, les chaînes de Markov dans les processus aléatoires, etc. La maîtrise du matériel de ce chapitre permet de :

- Définir un vecteur propre et une valeur propre d'une matrice carrée complexe.
- Définir et calculer la multiplicité algébrique et géométrique d'une valeur propre.
- Obtenir des valeurs propres et des bases des espaces propres d'une matrice.
- Déterminer quand une matrice carrée complexe est diagonalisable.
- Obtenir une diagonalisation d'une matrice diagonalisable.
- Calculer les puissances d'une matrice diagonalisable.
- Définir et identifier des matrices symétriques et hermitiennes.
- Démontrer que chaque valeur propre d'une matrice hermitienne est réelle.

Les connaissances requises pour ce chapitre incluent les nombres complexes, l'algèbre des matrices, et les déterminants.

7.1 La magie des puissances de matrices

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$. Soit $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Nous allons évaluer les produits suivants :

- $\mathbf{Ax}$
- $\mathbf{A}^2\mathbf{x}$
- $\mathbf{A}^{1000}\mathbf{x}$

Les deux premiers calculs peuvent s'effectuer sans grande difficulté. Cependant, le calcul direct de $\mathbf{A}^{1000}\mathbf{x}$ nécessitera beaucoup trop de travail, plus particulièrement si on le fait à la main. Existe-t-il un raccourci?

Notons que

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10-6 \\ 12-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Mais $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\mathbf{x}$! La multiplication de $\mathbf{x}$ à gauche par $\mathbf{A}$ est équivalente à doublant $\mathbf{x}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2\mathbf{x} &= \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{A}(2\mathbf{x}) \\ &= 2(\mathbf{A}\mathbf{x}) \\ &= 2(2\mathbf{x}) \\ &= 4\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En général, $\mathbf{A}^k\mathbf{x} = 2^k\mathbf{x}$, d'où $\mathbf{A}^{1000}\mathbf{x} = 2^{1000} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Cependant, cette méthode échoue pour $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ puisque $\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ n'est pas un multiple scalaire de $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Heureusement, il y a moyen d'éviter ce contretemps. Soient $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. On constate facilement que $\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$. Il est également possible de vérifier que $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$.

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= (\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1})(\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}) \\ &= \mathbf{P}\mathbf{D}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P})\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} \\ &= \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{I}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} \\ &= \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} \\ &= \mathbf{P}\mathbf{D}^2\mathbf{P}^{-1}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^3 &= \mathbf{A}\mathbf{A}^2 \\ &= \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{D}^2\mathbf{P}^{-1} \\ &= \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{D}^2\mathbf{P}^{-1} \\ &= \mathbf{P}\mathbf{D}^3\mathbf{P}^{-1}.\end{aligned}$$

En général, nous avons $\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1}$.

Puisque $\mathbf{D}$ est une matrice diagonale, $\mathbf{D}^k$ est obtenue de $\mathbf{D}$ en élevant chaque élément sur la diagonale de $\mathbf{D}$ à la k-ième puissance. Cela rend le calcul de $\mathbf{A}^k$ très facile. En particulier,

$$\mathbf{A}^{1000} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} 2^{1000} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}.$$

Un mystère demeure, toutefois. Comment obtient-on les matrices $\mathbf{P}$ et $\mathbf{D}$? La réponse à cette question nous mènera aux valeurs propres et aux vecteurs propres.

Exercices

1. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$.

   a. Calculer $\mathbf{A}^{10000}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

   b. Calculer $\mathbf{A}^{10}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Solutions

1. a. Notons que $\mathbf{A}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$. Donc, la réponse est $1^{100000}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$.

   b. $\begin{bmatrix}2^{12}-3\\6(2^{10}-1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4093\\6138\end{bmatrix}$

7.2 Définitions

Soient n un entier positif, $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, et $\lambda \in \mathbb{C}$. Un vecteur non nul $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ est un **vecteur propre** de $\mathbf{A}$ associé à la **valeur propre** λ si $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$.

Autrement dit, si $\mathbf{x}$ est un vecteur propre de $\mathbf{A}$, alors $\mathbf{Ax}$ est simplement un multiple scalaire de $\mathbf{x}$. Notons que par définition, le vecteur nul n'est *jamais* un vecteur propre.

Exemple 7.1. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Soit $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Notons que

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 1 \\ 1\cdot 2 + 0\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\mathbf{x}.$$

Par définition, $\mathbf{x}$ est un vecteur propre de $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre 2.

Un résultat important, qui sera utile plus tard lorsque nous discutons de diagonalisation d'une matrice, est le suivant :

Proposition 7.1. *Soient $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et k un entier positif. Supposons que $\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}$ sont des vecteurs propres de $\mathbf{A}$ associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ de $\mathbf{A}$, respectivement. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont toutes distinctes, alors $\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}$ sont linéairement indépendants.*

Démonstration. La preuve se fait par induction sur k.

L'énoncé est évidemment vrai lorsque $k = 1$ puisque par définition, un vecteur propre ne peut être le vecteur nul.

Supposons que le résultat soit vrai pour un entier positif k. Soit $\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k+1)}$ des vecteurs propres de $\mathbf{A}$ associés à des valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$ de $\mathbf{A}$, respectivement. Supposons, par contradiction, que $\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k+1)}$ ne soient pas linéairement indépendants. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\mathbf{v}^{(k+1)}$ s'écrite comme combinaison linéaire de $\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}$, c'est-à-dire qu'il existe scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ non tous nuls, tels que

$$\mathbf{v}^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}^{(i)}.$$

En multipliant chaque côté à gauche par $\mathbf{A}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{v}^{(k+1)} &= \mathbf{A}\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbf{v}^{(i)}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbf{A}\mathbf{v}^{(i)}\\ &= \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\lambda_i\mathbf{v}^{(i)}\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{v}^{(k+1)} &= \lambda_{k+1}\mathbf{v}^{(k+1)}\\ &= \sum_{i=1}^{k}\lambda_{k+1}\alpha_i\mathbf{v}^{(i)}\\ &= \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\lambda_{k+1}\mathbf{v}^{(i)}.\end{aligned}$$

Puisque $\mathbf{v}^{(1)},\ldots,\mathbf{v}^{(k)}$ sont linéairement indépendants (selon l'hypothèse d'induction), nous avons $\alpha_i\lambda_i = \alpha_i\lambda_{k+1}$ pour tout $i = 1,\ldots,k$. Puisque $\lambda_1,\ldots,\lambda_{k+1}$ sont toutes distinctes, nous devons avoir $\alpha_i = 0$ pour tout $i = 1,\ldots,k$, ce qui est une contradiction. □

7.2.1 Polynôme caractéristique

Comment trouve-t-on les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice carrée complexe?

Supposons que $\mathbf{x}$ soit un vecteur propre de $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre λ. Alors, $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ peut se réécrire sous la forme

$$\mathbf{A}\mathbf{x} - (\lambda\mathbf{I}_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

(Rappelons que $\mathbf{I}_n$ est la matrice identité $n\times n$.) On simplifie la côté gauche afin d'obtenir

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Ainsi, $\mathbf{x}$ est un vecteur non nul se retrouvant dans le noyau de $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n$.

Pour la matrice $\mathbf{A}$ de l'exemple 7.1, nous avons $\mathbf{A}-2\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & -2\end{bmatrix}$, le noyau contenant le vecteur $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$.

Pour toute valeur propre λ de $\mathbf{A}$, la matrice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n$ est singulière, ce qui implique que son déterminant est nul. L'expression $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)$ est un polynôme de degré en λ, que l'on nomme le **polynôme caractéristique** de $\mathbf{A}$ et que l'on dénote par $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda)$. (Certaines références définissent plutôt le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ par $\det(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A})$. Puisque $\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A}$ est singulière si et seulement si $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n$ l'est également, les deux définitions sont équivalentes.)

Le polynôme caractéristique de la matrice $\mathbf{A}$ à l'exemple 7.1 est

$$\begin{aligned}\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_2) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(-\lambda) - 2 \cdot 1 \\ &= \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1).\end{aligned}$$

Notons que -1 est une autre racine de ce polynôme.

On peut aussi y associer un vecteur propre. Nous devons trouver un vecteur $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tel que $(\mathbf{A} - (-1)\mathbf{I}_2)\mathbf{x} = 0$. Mais $\mathbf{A} - (-1)\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; par inspection, on voit alors que $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$ est un tel vecteur, d'où $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ est un vecteur propre de $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre -1.

Il n'y a pas d'autre valeur propre de $\mathbf{A}$ puisque nous avons trouvé toutes les racines du polynôme. (Un polynôme d'une variable de degré 2 possède au plus deux racines distinctes.)

En général, chaque racine du polynôme caractéristique est une valeur propre. Si λ est tel que $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n) = 0$, alors $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n$ est singulière et son noyau possède alors un vecteur non nul. Par définition, un tel vecteur est un vecteur propre associé à λ.

Exercices

1. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
   a. Écrivez $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda)$ sous la forme $a\lambda^2 + b\lambda + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$.
   b. Trouvez toutes les valeurs propres de $\mathbf{A}$.
   c. Pour chaque valeur propre trouvée, trouvez un vecteur propre associé. (Notez qu'il peut y avoir différentes bonnes réponses.)
2. Déterminez toutes les valeurs propres de $\begin{bmatrix} 7 & 12 & 4 \\ -8 & -13 & -4 \\ 16 & 24 & 7 \end{bmatrix}$.

Solutions

1. a. $\lambda^2 - 2\lambda + 1$

   b. 1 est la seule valeur propre.

   c. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ est un vecteur propre de $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre 1.

2. Les valeurs propres sont 3 et -1.

7.3 Multiplicités algébriques et géométriques

Soit λ une valeur propre de $\mathbf{A}$. Rappelons que les vecteurs propres de $\mathbf{A}$ associés à λ sont les vecteurs non nuls dans le noyau de $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$. Le noyau de $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ est l'**espace propre** de $\mathbf{A}$ associé à λ et il est dénoté par $E_{\mathbf{A}}(\lambda)$.

Exemple 7.2. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Notons que -1 est une valeur propre de $\mathbf{A}$. Alors, $\mathbf{A} - (-1)\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Le noyau de cette matrice est engendré par le vecteur $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ainsi, $E_{\mathbf{A}}(-1)$ est contenu dans $\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

La **multiplicité géométrique** d'une valeur propre λ de $\mathbf{A}$ est la dimension de $E_{\mathbf{A}}(\lambda)$. Dans l'exemple ci-dessus, la multiplicité géométrique de -1 est 1 puisque l'espace propre est engendré par un seul vecteur non nul.

La **multiplicité algébrique** d'une valeur valeur propre $\tilde{\lambda}$ de $\mathbf{A}$ mesure le nombre de fois que l'on retrouve le terme $(\lambda - \tilde{\lambda})$ dans la factorisation de $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda)$. Dans l'exemple ci-dessus, on peut vérifier que $(\lambda - (-1))$ n'apparaît qu'une seule fois.

Étudions maintenant un cas où la valeur propre possède une multiplicité algébrique supérieure à 1.

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Alors,

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = (\lambda - 1)^2.$$

Notons que 1 est une racine et que le terme $(\lambda - 1)$ apparaît deux fois. Donc, la multiplicité algébrique de 1 est 2. Afin d'obtenir sa multiplicité géométrique, considérons $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. On voit tout de suite que le rang de cette matrice est 1. D'après théorème 6.3, la dimension du noyau de cette matrice est 1, d'où la multiplicité géométrique est également 1. On constate que les deux multiplicités sont différentes!

Proposition 7.2. *La multiplicité géométrique d'une valeur propre est inférieure ou égale à sa multiplicité algébrique.*

Une preuve de cette proposition est discutée dans un des exercices ci-dessous.

Exercices

1. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.
   a. Déterminez les valeurs propres de $\mathbf{A}$.
   b. Déterminez la multiplicité algébrique et la multiplicité géométrique de chacune des valeurs propres.
2. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -9 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$.
   a. Déterminez toutes les valeurs propres de $\mathbf{A}$.
   b. Déterminez la multiplicité algébrique et la multiplicité géométrique de chacune des valeurs propres.
3. Soient $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. On dit que $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont **similaires** si $\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ pour une matrice inversible $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{n \times n}$.
   a. Démontrez que $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \chi_{\mathbf{B}}(\lambda)$.
   b. Soit λ' une valeur propre de $\mathbf{A}$. Démontrez que la multiplicité géométrique de λ' est au moins la multiplicité algébrique de λ'.

Solutions

1. a. Le polynôme caractéristique est

$$\begin{aligned}(1-\lambda)(2-\lambda)-2\cdot 3 &= 2-3\lambda+\lambda^2-6\\ &= \lambda^2-3\lambda-4\\ &= (\lambda+1)(\lambda-4)\end{aligned}$$

   Les valeurs propres sont alors -1 et 4.

   b. La multiplicité algébrique et la multiplicité géométrique de chaque valeur proper est 1.

2. a. Le polynôme est

$$\begin{aligned}(8-\lambda)(-4-\lambda)-4\cdot(-9) &= -32-4\lambda+\lambda^2+36\\ &= \lambda^2-4\lambda+4\\ &= (\lambda-2)^2\end{aligned}$$

   Il n'y a donc qu'une valeur propre : 2.

   b. À partir du polynôme caractéristique, on voit que la multiplicité algébrique de cette valeur propre est 2. La multiplicité géométrique est donnée par la nullité de

$$\mathbf{A}-2\mathbf{I}=\begin{bmatrix}6 & -9\\ 4 & -6\end{bmatrix},$$

   dont la matrice échelonnée réduite est $\begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$. Cette nullité est donc 1, d'où la multiplicité géométrique est 1.

3. a. Or,

$$\begin{aligned}\chi_{\mathbf{B}}(\lambda) &= \det(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I})\\ &= \det(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}-\lambda\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S})\\ &= \det(\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{S}-\lambda\mathbf{S}))\\ &= \det(\mathbf{S}^{-1})\det((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{S})\\ &= \frac{1}{\det(\mathbf{S})}\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\det(\mathbf{S})\\ &= \det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\chi_{\mathbf{A}}(\lambda).\end{aligned}$$

   tel que désiré.

   b. Soit k la multiplicité géométrique de la valeur propre λ'. Soit $\{\mathbf{v}^{(1)},\ldots,\mathbf{v}^{(k)}\}$ une base de l'espace propre associé à la valeur propre λ'. D'après le corollaire

6.3, il existe $\mathbf{v}^{(k+1)}, \mathbf{v}^{(k+2)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\{\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}\}$ est une base de $\mathbb{C}^n$.

Posons $\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS}$, où $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{(1)} & \cdots & \mathbf{v}^{(n)} \end{bmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned} \mathbf{SB} &= \mathbf{AS} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda'\mathbf{S}_1 & \cdots & \lambda'\mathbf{S}_k & \mathbf{AS}_{k+1} & \cdots & \mathbf{AS}_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Puisque les colonnes de $\mathbf{S}$ sont linéairement indépendantes, on doit avoir que $\mathbf{B}_i = \lambda'\mathbf{e}^{(i)}$, pour $i = 1, \ldots, k$, où $\mathbf{e}^{(i)}$ dénote la i-ième colonne de $\mathbf{I}_n$, d'où le polynôme caractéristique de $\mathbf{B}$ prend la forme $(\lambda' - \lambda)^k q(\lambda)$, pour un polynôme q de degré $n - k$. Donc, la multiplicité algébrique de λ' est $\geq k$, tel que désiré.

7.4 Diagonalisation

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. On dit que $\mathbf{A}$ est **diagonalisable** si $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$, où $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est une matrice inversible et $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est une matrice diagonale.

Proposition 7.3. *Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. $\mathbf{A}$ est diagonalisable si et seulement si pour chaque valeur propre λ de $\mathbf{A}$, la multiplicité algébrique de λ est égale à sa multiplicité géométrique.*

De façon équivalente, $\mathbf{A}$ est diagonalisable si la somme des multiplicités géométriques de ses valeurs propres donne n.

Exemple 7.3. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Notons que $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = (1-\lambda)^2$. La seule valeur propre de $\mathbf{A}$ est donc 1. De plus, $\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. La nullité de cette matrice est 1, ce qui implique que la multiplicité géométrique est 1 et non 2. $\mathbf{A}$ n'est alors pas diagonalisable.

Exemple 7.4. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Notons que $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = (4-\lambda)(5-\lambda)^2$. Les valeurs propres sont 4 et 5.

La multiplicité géométrique de 4 est 1 puisque la multiplicité géométrique ne peut être nulle et ne peut excéder la multiplicité algébrique de 4, qui est de 1.

Notons ensuite que $\mathbf{A} - 5\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Cette matrice est de rang 1 puisque la deuxième ligne est un multiple de la première ligne et que la troisième ligne est nulle. La nullité de $\mathbf{A} - 5\mathbf{I}$ est alors 2, ce qui implique que la multiplicité géométrique de la valeur propre 5 est 2.

La matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable puisque la somme des multiplicités géométrique est 3.

7.4.1 Trouver $\mathbf{P}$ et $\mathbf{D}$

Maintenant que nous savons que la matrice $\mathbf{A}$ de l'exemple 7.4 est diagonalisable, comment trouve-t-on $\mathbf{P}$ et $\mathbf{D}$?

Premièrement, observons que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ peut se réécrire sous la forme $\mathbf{AP} = \mathbf{PD}$. La i-ième colonne du côté gauche est donnée par $\mathbf{AP}_i$, où $\mathbf{P}_i$ dénote la i-ième colonne de $\mathbf{P}$, et la i-ième colonne du côté droit est donnée par $\mathbf{PD}_i$. Puisque $\mathbf{D}$ est une matrice diagonale, $\mathbf{PD}_i = d_{i,i}\mathbf{P}_i$. Ainsi, $\mathbf{P}_i$ doit être un vecteur propre ayant $d_{i,i}$ en tant que valeur propre. Puisque $\mathbf{P}$ doit être inversible, il doit y avoir n vecteurs propres linéairement

indépendants. C'est pourquoi la somme des multiplicités géométriques doit être égale à n.

Pour construire $\mathbf{D}$, il suffit de créer une liste de toutes les valeurs propres, incluant les valeurs propres multiples. L'ordre est sans importance. Une valeur propre de multiplicité algébrique k apparaît k fois dans la liste. La matrice $\mathbf{D}$ est obtenu en plaçant les valeurs propres de la liste sur la diagonale.

Dans notre exemple, la liste pourrait être $4, 5, 5$. Nous aurions donc $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Pour construire $\mathbf{P}$, il faut d'abord obtenir une base de chaque espace propre. Pour créer la première colonne de $\mathbf{P}$, on prend un vecteur de la base de l'espace propre du premier élément sur la diagonale de $\mathbf{D}$ et on élimine ce vecteur de toute future inclusion dans $\mathbf{P}$. Pour chaque colonne i suivante, on prend un vecteur de la base de l'espace propre du i-ième élément sur la diagonale de la matrice $\mathbf{D}$ et on l'élimine de toute future inclusion dans $\mathbf{P}$.

Dans notre exemple, nous devons premièrement obtenir une base de l'espace propre de 4 et une base de l'espace propre de 5.

Pour la valeur propre 4, on cherche une base du noyau de $\mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

La forme échelonnée réduite de cette dernière est $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Toutes les solutions de $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ sont de la forme $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ puisque x_2 est une variable indépendante. Donc, $\left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ est une base de l'espace propre associé à la valeur propre 4.

Pour la valeur propre 5, on cherche une base du noyau de $\mathbf{A} - 5\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

La forme échelonnée réduite de cette dernière est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Toutes les solutions de

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ sont de la forme $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ puisque x_2 et x_3 sont des variables indépendantes. Donc, $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ est une base de l'espace propre associé à la valeur propre 5.

Pour créer la première colonne de $\mathbf{P}$, on choisit un vecteur de la base de l'espace propre associé à la valeur propre 4. Il existe qu'un seul tel vecteur dans notre choix de la base, d'où $\mathbf{P}$ prend la forme $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & * & * \\ 1 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}$.

Pour la deuxième colonne, on choisit un vecteur de la base de l'espace propre associé à la valeur propre 5. Il y a deux vecteurs parmi lesquels choisir; prenons $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Alors, $\mathbf{P}$ devient $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & * \\ 1 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$.

Finalement, nous n'avons pas le choix que de choisir le vecteur restant dans la base de l'espace propre associé à la valeur 5 afin de remplir la dernière colonne de $\mathbf{P}$. Ainsi, $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Notons que $\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Nous pouvons maintenant vérifier que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$.

Exercices

1. Est-ce que $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ est diagonalisable?
2. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Diagonalisez $\mathbf{A}$ en trouvant une matrice $\mathbf{P}$ et une matrice diagonale $\mathbf{D}$ tel que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$.

3. Démontrez la proposition 7.3.

Solutions

1. Soit $\mathbf{A}$ la matrice donnée. Les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont 2 et 3. $\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, dont le rang est 1. La multiplicité géométrique de la valeur propre 2 est donc 2. $\mathbf{A} - 3\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, dont le rang est 2. La multiplicité géométrique de la valeur propre 2 est donc 1. Puisque la somme des multiplicités géométriques est égale au nombre de colonne de $\mathbf{A}$, la matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable.

2. Débutons par obtenir les valeurs propres de $\mathbf{A}$ en résolvant $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$, c'est-à-dire
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$
ou, de manière équivalente,
$$(1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0.$$
Les valeurs propres sont alors 1 et 2.
Notons que $\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. La forme échelonnée réduite est $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Une base du noyau de $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ est donnée par $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.
Notons que $\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. Sa forme échelonnée réduite est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Une base du noyau de cette matrice est donnée par $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.
Alors, en prenant $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, on obtient $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$.

3. (Esquisse.) Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres de $\mathbf{A}$. Pour $i = 1, \ldots, k$, soit B_i une base de l'espace propre associé à λ_i. Alors, $|\bigcup_{i=1}^{k} B_i| = n$. Il est possible de démontrer, en utilisant la proposition 7.1, que $\bigcup_{i=1}^{k} B_i$ est un ensemble linéairement indépendant. Le résultat suit en choisissant les colonnes de $\mathbf{P}$ parmi les éléments de $\bigcup_{i=1}^{k} B_i$.

7.5 Matrices symétriques et hermitiennes

Soit $\mathbf{A}$ une matrice de taille $n \times n$. On dit que $\mathbf{A}$ est **symétrique** si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\mathsf{T}$. Par exemple, les matrices suivantes sont symétriques : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \pi & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

Lorsque les éléments de $\mathbf{A}$ sont des nombres complexes, il est plus commun de considérer si cette dernière est **hermitienne** :

$$\overline{\mathbf{A}^\mathsf{T}} = \mathbf{A}.$$

Ici, $\overline{\mathbf{A}}$ dénote la matrice dont l'élément (i, j) est le conjugué de l'élément (i, j) de $\mathbf{A}$.

Exemple 7.5. La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{bmatrix}$ est hermitienne.

Notons que chaque élément sur la diagonale d'une matrice hermitienne doit être réel puisqu'il est égal à son conjugué. De plus, une matrice hermitienne réelle est tout simplement une matrice symétrique réelle.

Par convention, on écrit $\mathbf{A}^*$ à la place de $\overline{\mathbf{A}^\mathsf{T}}$. Donc, une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ est hermitienne si et seulement si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$.

Les matrices symétriques et hermitiennes sont utilisées dans plusieurs applications, telles que la théorie du contrôle, les analyses statistiques, et l'optimisation.

7.5.1 Les valeurs propres de matrices symétriques réelles

Théorème 7.1. *Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ une matrice hermitienne. Alors chaque valeur propre de $\mathbf{A}$ est réelle.*

Une preuve du théorème est décrite dans un des exercices de fin de section.

Puisqu'une matrice symétrique réelle est aussi hermitienne, le résultat suivant découle du théorème 7.1.

Corollaire 7.1. *Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique. Alors, chaque valeur propre de $\mathbf{A}$ est réelle.*

Pour illustrer ce théorème, établissons le corollaire dans le cas d'une matrice 2×2. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ une matrice symétrique. Alors, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, pour des réels a, b et c.

Les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont toutes les valeurs λ satisfaisant à

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

En faisant l'expansion du côté gauche, on obtient

$$\lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0.$$

Le terme de gauche est une fonction quadratique en λ ayant comme discriminant $(a+c)^2 - 4ac + 4b^2 = (a-c)^2 + 4b^2$, qui est la somme de deux carrés de nombres réels et est donc non négatif pour toutes les valeurs réelles a, b et c. Les racines de cette fonction quadratique sont donc réelles, tout comme les valeurs propres de $\mathbf{A}$.

Exercices

1. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne. Soit $\mathbf{v}$ un vecteur propre de $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre λ.

   a. Montrez que
   $$\left(\overline{\mathbf{Av}}\right)^{\mathsf{T}} \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}}^{\mathsf{T}} \mathbf{Av}.$$

   b. Utilisez le résultat précédent pour déduire que $\overline{\lambda} = \lambda$

Solutions

1. a. Notons que

$$\begin{aligned}\left(\overline{\mathbf{A}\mathbf{v}}\right)^{\mathsf{T}}\mathbf{v} &= \left(\overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{v}}\right)^{\mathsf{T}}\mathbf{v}\\ &= \overline{\mathbf{v}}^{\mathsf{T}}\left(\overline{\mathbf{A}}\right)^{\mathsf{T}}\mathbf{v}\\ &= \overline{\mathbf{v}}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{*}\mathbf{v}\\ &= \overline{\mathbf{v}}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{v}\end{aligned}$$

   tel que désiré.

   b. Du résultat précédent, on obtient

$$\left(\overline{\mathbf{A}\mathbf{v}}\right)^{\mathsf{T}}\mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{v},$$

   d'où

$$\left(\overline{\lambda\mathbf{v}}\right)^{\mathsf{T}}\mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}}^{\mathsf{T}}(\lambda\mathbf{v}),$$

   ce qui implique que

$$\overline{\lambda}\overline{\mathbf{v}}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} = \lambda\overline{\mathbf{v}}^{\mathsf{T}}\mathbf{v}.$$

   Puisque $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ (car $\mathbf{v}$ est un vecteur propre de $\mathbf{A}$), $\overline{\mathbf{v}}^{\mathsf{T}}\mathbf{v}$ doit être un nombre réel positif. On en déduit que $\overline{\lambda} = \lambda$.

7.6 Exemple de test portant sur la matière de ce chapitre

1. Montrez que -1 est une valeur propre de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
2. Montrez que $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ est un vecteur propre de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$.
3. Étant donné que 2 est une valeur propre de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, déterminez sa multiplicité algébrique et sa multiplicité géométrique.
4. Montrez que les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les éléments déjà sur sa diagonale.
5. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Étant donné que 1 est une valeur propre de $\mathbf{A}$, trouvez une base de l'espace propre de $\mathbf{A}$ associé à cette valeur propre.
6. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Diagonalisez $\mathbf{A}$ en trouvant une matrice inversible $\mathbf{P}$ et une matrice diagonale $\mathbf{D}$ telles que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$.
7. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Démontrez que si $\mathbf{A}$ possède n valeurs propres distinctes, alors $\det(\mathbf{A})$ est le produit de ces valeurs propres.
8. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Montrez que chaque valeur propre de $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ est un nombre réel non négatif.
9. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 - 5a & -16 + 10a \\ 5 - 3a & -8 + 6a \end{bmatrix}$. Déterminez s'il existe une valeur de a pour laquelle $\mathbf{A}$ *n'est pas* diagonalisable.

Solutions

1. Montrons que -1 est une racine du polynôme caractéristique $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$, c'est-à-dire que $\det(\mathbf{A}-(-1)\mathbf{I})=0$.

   Puisque $\mathbf{A}-(-1)\mathbf{I}=\begin{bmatrix}0&2\\1&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix}$, alors $\det(\mathbf{A}-(-1)\mathbf{I})=\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix}=1\cdot 2-2\cdot 1=0$, d'où -1 est une valeur propre de $\mathbf{A}$

2. Nous devons montrer que $\mathbf{Au}=\lambda\mathbf{u}$ pour une scalaire λ.

   Notons que

   $$\mathbf{Au}=\begin{bmatrix}2&2\\6&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}=-2\mathbf{u}.$$

   Ainsi, $\mathbf{u}$ est un vecteur propre de $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre $\lambda=-2$.

3. Déterminons d'abord le multiplicité géométrique de la valeur propre $\lambda=2$. Notons que

   $$\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}=\mathbf{A}-2\mathbf{I}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&-2\\0&1&-2\end{bmatrix}.$$

   Sa FER est $\begin{bmatrix}0&1&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$. Puisque cette dernière ne possède qu'une seule colonne pivot (la deuxième), la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}-2\mathbf{I})$ est $3-1=2$, d'où la multiplicité géométrique de λ est 2.

   Afin de déterminer la multiplicité algébrique, notons que le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est

   $$\begin{aligned}\chi_{\mathbf{A}}(\lambda)&=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&-2\\0&1&-\lambda\end{vmatrix}\\&=(2-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda&-2\\1&-\lambda\end{vmatrix}\\&=(2-\lambda)(-3\lambda+\lambda^2+2)\\&=(2-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda).\end{aligned}$$

   Ainsi, le term $(2-\lambda)$ se retrouve deux fois dans la factorisation de $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda)$; la multiplicité algébrique de λ est donc également 2.

4. Soit $\mathbf{A}$ une matrice triangulaire de taille $n \times n$. Soit a_i le i-ième élément de la diagonale de $\mathbf{A}$, pour $i = 1, \ldots, n$.

   Les valeurs propres sont précisement les racines du polynôme caractéristique $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)$. Puisque $\mathbf{A}$ est triangulaire, $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n$ est aussi triangulaire est son déterminant est $(a_1 - \lambda)(a_2 - \lambda) \cdots (a_n - \lambda)$. Ainsi, les racines de $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda)$ sont précisement $a_1, \ldots, a_n$, et les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont les éléments sur sa diagonale.

5. Nous devons trouver une base du noyau de $\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

   On voit aisément que la FER de $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ est $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Notons que la première et troisième colonne ne sont pas des colonnes pivots. Ainsi, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ est une base du noyau.

6. Nous trouvons les valeurs propres de $\mathbf{A}$ en trouvant les racines du polynôme caractéristique $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$, c'est-à-dire en résolvant

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0.$$

   Ainsi, les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont 1 et 2.

   Notons que $\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, et que sa FER est $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, d'où $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. une base de $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{I})$.

   Notons que $\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ et que sa FER est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, d'où $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ est une base de $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$.

   Ainsi, si $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, on obtient $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$.

7. Puisque $\mathbf{A}$ possède n valeurs propres distinctes, $\mathbf{A}$ est diagonalisable, et il existe alors une matrice inversible $\mathbf{P}$ et une matrice diagonale $\mathbf{D}$ telles que $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$.

Ainsi, $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{PDP}^{-1}) = \det(\mathbf{P})\det(\mathbf{D})\det(\mathbf{P}^{-1}) = \det(\mathbf{P})\det(\mathbf{D})\frac{1}{\det(\mathbf{P}^{-1})} = \det(\mathbf{D})$. Mais $\mathbf{D}$ est une matrice diagonale, d'où $\det(\mathbf{D})$ est le produit des éléments sur sa diagonale, qui sont précisement les valeurs propres de $\mathbf{A}$.

8. Soit λ une valeur propre de $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$. Soit $\mathbf{u}$ un vecteur propre de $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ associé à λ. Alors $0 \leq \|\mathbf{Au}\|^2 = (\mathbf{Au})^\mathsf{T}(\mathbf{Au}) = \mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Au} = \mathbf{u}^\mathsf{T}(\lambda\mathbf{u}) = \lambda\|\mathbf{u}\|^2$. Puisque $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, $\|\mathbf{u}\|^2 > 0$. Puisque $\lambda\|\mathbf{u}\|^2$ est un nombre réel non négatif et que $\|\mathbf{u}\|^2$ est un nombre réel positif, on doit avoir que λ est un nombre réel non négatif.

9. Puisque $\mathbf{A}$ est de taille 2×2, $\mathbf{A}$ est diagonalisable si $\mathbf{A}$ possède deux valeurs propres distinctes. Nous devons donc d'abord déterminer toutes les valeurs de a pour lesquelles $\mathbf{A}$ ne possède qu'une unique valeur propre.

   Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 10-5a-\lambda & -16+10a \\ 5-3a & -8+6a-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (10-5a-\lambda)(-8+6a-\lambda) - (-16+10a)(5-3a) \\
&= -80+100a-30a^2-(2+a)\lambda+\lambda^2+80-98a+30a^2 \\
&= 2a-(2+a)\lambda+\lambda^2 \\
&= (2-\lambda)(a-\lambda).
\end{aligned}$$

   Ainsi, $\mathbf{A}$ ne possède q'une unique valeur propre que lorsque $a = 2$. Notons que dans ce cas, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ et $\lambda = 2$ est la valeur propre en question. De plus, $\mathbf{A}-2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Cette matrice est nettement de rang 1 et sa nullité est inférieure à 2.

   Ainsi, la multiplicité géométrique de l'unique valeur propre $\lambda = 2$ est inférieure à sa multiplicité algébrique, d'où $\mathbf{A}$ n'est pas diagonalisable. C'est la seule valeur de a pour laquelle c'est le cas.

Partie II

Chapitre 8

Transformations linéaires

Dans ce chapitre, nous introduisons la notion d'application linéaire. Une application linéaire est une fonction dont domaine et codomaine sont des espaces vectoriels satisfaisant à certaines propriétés. Les concepts fondamentaux (noyau, image d'une application linéaire, etc.) sont présentés, et la caractérisation de la surjectivité et de l'injectivité sera étudiée. Nous étudions également le lien entre les applications linéaires et les matrices. Finalement, un concept de dualité liant un espace vectoriel avec ses fonctionnelles linéaires sera introduit. La maîtrise du matériel de ce chapitre permet de :

- Définir et identifier une application linéaire.
- Définir le noyau et l'image d'une application linéaire.
- Obtenir une base du noyau ou de l'image d'une application linéaire.
- Définir et identifier la surjectivité et l'injectivité.
- Expliquer le lien entre une application linéaire et sa représentation par une matrice.
- Obtenir une représentation matricielle d'une application linéaire.
- Interpréter les matrices de changement de bases dans le contexte de applications linéaires.
- Définir l'espace dual algébrique d'un espace vectoriel.

Les connaissances requises pour ce chapitre incluent l'algèbre des matrices et les espaces vectoriels.

8.1 Définition

Soient V et W des espaces vectoriels dont les scalaires proviennent d'un même corps $\mathbb{K}$. Une fonction $T : V \to W$ est une **application linéaire** si

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$
$$T(\alpha\mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$$

pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ et tout $\alpha \in \mathbb{K}$.

Cette définition a deux conséquences :

1. $T(\alpha_1\mathbf{x}^{(1)} + \cdots + \alpha_m\mathbf{x}^{(m)}) = \alpha_1 T(\mathbf{x}^{(1)}) + \cdots + \alpha_m(T\mathbf{x}^{(m)})$ pour tous $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)} \in V$ et scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$.
2. $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$, où $\mathbf{0}_V$ dénote le vecteur nul de V et $\mathbf{0}_W$ dénote le vecteur nul de W.

Exemple 8.1. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Alors, l'application $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ définie par $T(\mathbf{u}) = \mathbf{Au}$ est linéaire. Pour démontrer ceci, nous devons vérifier les deux conditions. Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors,

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{A}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{Au} + \mathbf{Av} = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

et

$$T(\alpha\mathbf{u}) = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{Au}) = \alpha T(\mathbf{u}).$$

Exemple 8.2. Rappelons que $P_2(\mathbb{R})$ dénote l'espace vectoriel des polynômes en x à coefficients réels et de dégré au plus 2. Soit $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ donné par

$$T(ax^2+bx+c) = \begin{bmatrix} a+3c \\ a \end{bmatrix}.$$

Alors, T est une application linéaire. Pour démontrer ce résultat, prenons deux vecteurs $a_1x^2+b_1x+c_1$ et $a_2x^2+b_2x+c_2$ de $P_2(\mathbb{R})$ et un nombre réel γ. Alors,

$$\begin{aligned}
&T((a_1x^2+b_1x+c_1)+(a_2x^2+b_2+c_2)) \\
=&\,T((a_1+a_2)x^2+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2)) \\
=&\begin{bmatrix} (a_1+a_2)+3(c_1+c_2) \\ a_1+a_2 \end{bmatrix} \\
=&\begin{bmatrix} (a_1+3c_1)+(a_2+3c_2) \\ a_1+a_2 \end{bmatrix} \\
=&\begin{bmatrix} a_1+3c_1 \\ a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2+3c_2 \\ a_2 \end{bmatrix} \\
=&\,T(a_1x^2+b_1x+c_1) + T(a_2x^2+b_2x+c_2),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&T(\gamma(a_1x^2+b_1x+c_1))\\
=&T((\gamma a_1)x^2+(\gamma b_1)x+\gamma c_1)\\
=&\begin{bmatrix}\gamma a_1+3(\gamma c_1)\\ \gamma a_1\end{bmatrix}\\
=&\gamma\begin{bmatrix}a_1+3(c_1)\\ a_1\end{bmatrix}\\
=&\gamma T(a_1x^2+b_1x+c_1).
\end{aligned}$$

On peut établir un raccourci afin de vérifier si $T:V\to W$ est une application linéaire :

Proposition 8.1. *$T:V\to W$ est une application linéaire si et seulement si*

$$T(\alpha\mathbf{u}+\mathbf{v})=\alpha T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})$$

pour tous $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$ et $\alpha\in\mathbb{K}$.

Démonstration. Si T est une application linéaire, alors selon les propriétés d'une application linéaire,

$$T(\alpha\mathbf{u}+\mathbf{v})=T(\alpha\mathbf{u})+T(\mathbf{v})=\alpha T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v}).$$

Réciproquement, supposons que

$$T(\alpha\mathbf{u}+\mathbf{v})=\alpha T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})$$

pour tous $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$ et $\alpha\in\mathbb{K}$. Avec $\alpha=1$, nous obtenons $T(\mathbf{u}+\mathbf{v})=T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})$.

De plus,

$$T(\mathbf{0}_V)=T(\mathbf{0}_V+\mathbf{0}_V)=T(\mathbf{0}_V)+T(\mathbf{0}_V),$$

ce qui implique que $T(\mathbf{0}_V)=\mathbf{0}_W$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
T(\alpha\mathbf{u})&=T(\alpha\mathbf{u}+\mathbf{0}_V)\\
&=\alpha T(\mathbf{u})+T(\mathbf{0}_V)\\
&=\alpha T(\mathbf{u})+\mathbf{0}_W\\
&=\alpha T(\mathbf{u}).
\end{aligned}$$

□

Exercices

1. Soit $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ tel que $T(\mathbf{x}) = 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5$. T est-elle une application linéaire? Expliquez votre raisonnement.
2. Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ et $T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Que vaut $T\left(\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}\right)$?

Solutions

1. T est linéaire puisque T satisfait à $T(\alpha\mathbf{u}+\mathbf{v}) = 0 = \alpha 0 + 0 = \alpha T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^5$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Notons que
$$\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Ainsi,
$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}\right) &= 3T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) + (-1)T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= 3\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ -14 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

8.2 Noyau d'une application linéaire

Soit $T : V \to W$ une application linéaire où V et W sont des espaces vectoriels à scalaires dans un corps $\mathbb{K}$. Le **noyau** de T, dénoté par $\ker(T)$, est défini par

$$\ker(T) = \{\mathbf{v} \in V \ : \ T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W\}.$$

Exemple 8.3. Soit T donnée par $T(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$, où $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Par définition, le noyau de T est l'ensemble des $\mathbf{v}$ tels que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Mais $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ précisément lorsque $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Ainsi, $\ker(T) = \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$, le noyau de $\mathbf{A}$.

Exemple 8.4. Soit $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire définie par $T(ax^2+bx+c) = \begin{bmatrix} a+3c \\ a-c \end{bmatrix}$. Le noyau de T est l'ensemble des polynômes ax^2+bx+c tels que $\begin{bmatrix} a+3c \\ a-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. La solution de ce système donne $a = c = 0$. Donc, $\ker(T) = \{bx \ : \ b \in \mathbb{R}\}$.

8.2.1 Solutions d'un système linéaire

Soit $T : V \to W$ une application linéaire. Supposons qu'on vous demande de trouver toutes les solutions de $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ pour $\mathbf{b} \in W$. Si une solution a été trouvée, disons $\tilde{\mathbf{x}}$, alors l'ensemble de toutes les solutions est donné par $\{\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{d} \ : \ \mathbf{d} \in \ker(T)\}$. Autrement dit, la connaissance d'une seule solution et la description du noyau de T donnent toutes les solutions de $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$. On dit que le vecteur $\tilde{\mathbf{x}}$ est une **solution particulière**.

Lorsque $T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, ceci revient à dire que pour spécifier toutes les solutions de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, nous avons seulement besoin d'une solution particulière et d'une description du noyau de $\mathbf{A}$.

Exercices

1. Déterminez le noyau de chacune des applications linéaires suivantes.
   a. $T(ax+b) = a-b$, où $a, b \in \mathbb{R}$.
   b. $T(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$, où $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.
2. Soit T donné par $T(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$, où $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Supposons que le rang de $\mathbf{A}$ soit n. Montrez que le noyau de T ne contient que le vecteur nul.

Solutions

1. Les noyaux sont :
   a. $\{t(x+1) \,:\, t \in \mathbb{R}\}$
   b. $\left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \,:\, t \in \mathbb{R} \right\}$
2. Soit $\mathbf{v} \in \ker(T)$. Alors $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$, ce qui implique que $\sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{A}_i = \mathbf{0}$, où $\mathbf{A}_i$ dénote la i-ième colonne de $\mathbf{A}$. Puisque le rang de $\mathbf{A}$ est n, qui est égal au nombre de colonnes, les colonnes de $\mathbf{A}$ sont linéairement indépendantes. Ceci implique que $v_1 = \cdots = v_n = 0$, d'où $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

8.3 Surjectivité et injectivité

8.3.1 Domaine et image

Soit $T : V \to W$ une application linéaire, où V et W sont des espaces vectoriels à scalaires dans un corps $\mathbb{K}$.

V est le **domaine** de T et W est le **codomaine** de T. L'**image** de T, dénoté par $\text{image}(T)$, est l'ensemble de tous les vecteurs de W que l'on peut atteindre par T, c'est-à-dire

$$\text{image}(T) = \{T(\mathbf{u}) \,:\, \mathbf{u} \in V\}.$$

Par exemple, si T est donné par $T(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$, où $\mathbf{A}$ est une matrice, alors $\text{image}(T) = \text{Col}(\mathbf{A})$.

8.3.2 Surjection

On dit que T est **surjective** si son image et son codomaine sont les mêmes. Ceci veut dire que chaque vecteur de W peut être atteint par T. Si T est surjective, on dit que c'est une **surjection**.

Exemple 8.5. Soit $T : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ donnée par $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix}$. Notons que chaque vecteur de $\text{image}(T)$ est de la forme $\begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}$ puisque $-x_1 + x_2 = -(x_1 - x_2)$. Puisqu'il existe des vecteurs dans $\mathbb{Q}^2$ qui n'ont pas cette forme ($\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, par exemple), T n'est pas surjective.

Puisque l'image de T est un sous-espace de W, on peut établir la surjectivité en vérifiant si $\text{image}(T)$ et W on la même dimension, tant et aussi longtemps que W soit de dimension finie.

Par exemple, si T est donnée par $T(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$, pour une matrice $\mathbf{A}$, T est une surjection si et seulement si le rang de $\mathbf{A}$ et la dimension du codomaine sont égaux. (Rappel : $\text{rang}\,(\mathbf{A}) = \dim(\text{Col}(\mathbf{A}))$.)

8.3.3 Injection

On dit que T est **injective** si $T(\mathbf{u}) \neq T(\mathbf{v})$ lorsque $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$. Ceci implique que l'image de deux éléments distincts de V par T contient deux vecteurs distincts de W. Si T est injective, on dit que c'est une **injection**.

Exemple 8.6. Considérons la même application T que dans l'exemple 8.5. Elle n'est pas injective puisque pour chaque $a \in \mathbb{Q}$,

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a-a \\ -a+a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Le résultat suivant permet de facilement vérifier si une application linéaire est injective.

Théorème 8.1. *Soit $T : V \to W$ une application linéaire. Alors T est injective si et seulement si* $\ker(T) = \{\mathbf{0}_V\}$.

Démonstration. S'il existe $\mathbf{u} \in \ker(T)$, où $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, alors $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$, ce qui implique que T n'est pas injective.

Réciproquement, supposons que $\ker(T) = \{\mathbf{0}_V\}$. Soient $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v} \in V$ tels que $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$. Alors $T(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = T(\mathbf{u})-T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$, ce qui implique que $\mathbf{u}-\mathbf{v} \in \ker(T)$. Puisque $\ker(T) = \{\mathbf{0}_V\}$, on doit avoir $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0}_V$, d'où $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, et T est injective. □

Par exemple, si T est donnée par $T(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$ pour une matrice $\mathbf{A}$, alors T est une injection si et seulement si la nullité de $\mathbf{A}$ est 0.

Exemple 8.7. Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire donné par

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a-b-c \\ -a+b \end{bmatrix}.$$

Notons que

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \mathbf{A}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

où $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. La forme échelonnée réduite de $\mathbf{A}$ est $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, d'où le rang de $\mathbf{A}$ est 2 et la dimension de son noyau est 1. Puisque le rang est égal à la dimension du codomaine $\mathbb{R}^2$, on voit en conséquence d'une discussion préalable, que T est surjective. Mais T n'est pas injective puisque la nullité de $\mathbf{A}$ n'est pas zéro.

8.3.4 Théorème du rang pour les applications linéaires

Le résultat suivant généralise le théorème 6.3 :

Théorème 8.2. *Soit V un espace vectoriel de dimension fini. Soit T une application linéaire ayant V comme domaine. Alors,*

$$\dim(\text{image}(T)) + \dim(\ker(T)) = \dim(V).$$

Exercices

1. Pour chacune des applications linéaires suivantes, déterminez si c'est surjective ou injective.

   a. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ 2x-y \end{bmatrix}$.

   b. $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ donnée par $T(\mathbf{z}) = \mathbf{A}\mathbf{z}$, où $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} i & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   c. $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ donnée par $T(ax^2+bx+c) = \begin{bmatrix} a+b \\ b-c \end{bmatrix}$.

Solutions

1. a. Notons que $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$ est donnée par $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. La matrice est de rang 2 et donc T est surjective et injective.

   b. Puisque $\mathbf{A}$ est de rang 2, T est une injection mais pas une surjection.

   c. T est une surjection puisque pour chaque $\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

   $$T(sx^2 - t) = \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}.$$

   Ce n'est pas une injection car

   $$T(x^2 - x - 1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   et $x^2 - x - 1$ n'est pas nul.

8.4 Bijections et isomorphismes

Soit $T : V \to W$ une application linéaire où V et W sont des espaces vectoriels à scalaires dans un corps $\mathbb{K}$. Si T est surjective et injective, alors T est **bijective** et T est une **bijection**.

Si T est une bijection, alors l'inverse de T existe. Nous montrons maintenant que l'inverse de T est aussi une application linéaire.

Soit $S : W \to V$ une application (pas nécessairement linéaire, a priori) telle que $S(T(\mathbf{u})) = \mathbf{u}$ pour tout $\mathbf{u} \in V$.

Prenons $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)} \in W$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On doit montrons que $S(\mathbf{y}^{(1)}+\mathbf{y}^{(2)}) = S(\mathbf{y}^{(1)})+S(\mathbf{y}^{(2)})$ et $S(\alpha\mathbf{y}^{(1)}) = \alpha S(\mathbf{y}^{(1)})$.

Soit $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)} \in V$ telle que $T(\mathbf{x}^{(i)}) = \mathbf{y}^{(i)}$ pour $i = 1, 2$. (L'existence de $\mathbf{x}^{(1)}$ et $\mathbf{x}^{(2)}$ est garantie par surjectivité de T.) Alors $S(\mathbf{y}^{(i)}) = S(T(\mathbf{x}^{(i)})) = \mathbf{x}_i$ pour $i = 1, 2$. Puisque T est une application linéaire, nous obtenons

$$\begin{aligned} S(\mathbf{y}^{(1)} + \mathbf{y}^{(2)}) &= S(T(\mathbf{x}^{(1)}) + T(\mathbf{x}^{(2)})) \\ &= S(T(\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{(2)})) \\ &= \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{(2)} \\ &= S(\mathbf{y}^{(1)}) + S(\mathbf{y}^{(2)}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S(\alpha\mathbf{y}^{(1)}) &= S(\alpha T(\mathbf{x}^{(1)})) \\ &= S(T(\alpha\mathbf{x}^{(1)})) \\ &= \alpha\mathbf{x}^{(1)} \\ &= \alpha S(\mathbf{y}^{(1)}). \end{aligned}$$

Ceci montre que S est une application linéaire.

Exemple 8.8. Les applications linéaires correspondant aux opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice sont bijectives.

Exemple 8.9. Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$. Puisque T n'est ni surjective ni injective, T n'est pas bijective.

(Mentionnons en passant que T est appelée une **projection** parce qu'elle « projète » les points de $\mathbb{R}^3$ dans le plan x-y.)

Le résultat suivant est très utile.

Proposition 8.2. *Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\mathbb{K}$ un corps. Si $T : \mathbb{K}^n \to FF^n$ est donnée par $T(\mathbf{u}) = \mathbf{Au}$, alors T est bijective si et seulement si $\mathbf{A}$ est inversible.*

8.4.1 Isomorphisme

Soient V et W des espaces vectoriels à scalaires dans un corps $\mathbb{K}$. On dit que V est **isomorphe** à W s'il existe une application linéaire $T : V \to W$ qui est bijective. On dit que T est un **isomorphisme**.

Puisque l'inverse d'une application linéaire bijective est aussi une application linéaire, V est isomorphe à W si et seulement si W est isomorphe à V. Donc, on peut simplement dire que V et W sont isomorphe.

Théorème 8.3. *Soient V et W des espaces vectoriels de dimensions finis sur le même corps $\mathbb{K}$. Alors V et W sont isomorphe si et seulement si $\dim(V) = \dim(W)$.*

Démonstration. Nous démontrons la suffisance. La nécessité est laissée en exercice.

Supposons que $\dim(V) = \dim(W) = n$ pour un entier positif n. Le cas où $n = 0$ est trivial. Supposons alors que $n > 0$. Soit $\{\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}\}$ une base de V et $\{\mathbf{w}^{(1)}, \ldots, \mathbf{w}^{(n)}\}$ une base de W. Pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, on définit T par

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v}^{(i)}\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{w}^{(i)}.$$

Alors T est une fonction bijective de V dans W puisque pour chaque $\mathbf{u} \in V$, il existe une unique image pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v}^{(i)}$. Il ne reste que montrer que T est une application linéaire.

Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, et $\gamma \in \mathbb{K}$. Puisque $\{\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}\}$ est une base de V, il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}^{(i)}$$

et

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{v}^{(i)}.$$

Alors

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{v}^{(i)} + \sum_{i=1}^{n}\beta_i\mathbf{v}^{(i)}\right) \\ &= T\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)\mathbf{v}^{(i)}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)\mathbf{w}^{(i)} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{w}^{(i)} + \sum_{i=1}^{n}\beta_i\mathbf{w}^{(i)} \\ &= T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{v}^{(i)}\right) + T\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i\mathbf{v}^{(i)}\right) \\ &= T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} T(\alpha\mathbf{x}) &= T\left(\gamma\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{v}^{(i)}\right) \\ &= T\left(\sum_{i=1}^{n}(\gamma\alpha_i)\mathbf{v}^{(i)}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(\gamma\alpha_i)\mathbf{w}^{(i)} \\ &= \gamma\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{w}^{(i)} \\ &= \gamma T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{v}^{(i)}\right) \\ &= \gamma T(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. □

Exercices

1. Déterminez si les application linéaires suivantes sont inversibles.
   a. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ 2x-y \end{bmatrix}$.
   b. $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ donnée par $T(\mathbf{z}) = \mathbf{A}\mathbf{z}$ où $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} i & 2 \\ 1 & -2i \end{bmatrix}$.
2. Montrez que $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^{2\times 2}$ sont isomorphes.

3. Soit W le sous-espace $\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b-a & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$. Montrez que W et $\mathbb{R}^2$ sont isomorphes.

Solutions

1. a. T est inversible.

   b. T n'est pas inversible.

2. On peut facilement voir que $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ donnée par

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

   est inversible. Donc, $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^{2\times 2}$ sont isomorphes.

3. Il suffit de montrer que $\dim(W) = 2$. Observons que

$$W = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \ : \ a, b, \in \mathbb{R} \right\}.$$

   Ainsi, W est l'espace vectoriel engendré par

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

   qui est, de toute évidence, linéairement indépendant et est donc une base de W, d'où $\dim(W) = 2$.

8.5 Matrice d'une application linéaire

Soit V un espace vectoriel de dimension n. Rappelons que, pour une base ordonnée $\Gamma = \left(\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(n)}\right)$ de V et un vecteur $\mathbf{u} \in V$, la représentation de $\mathbf{u}$ par un uplet par rapport à Γ, dénoté par $[\mathbf{u}]_\Gamma$, est l'uplet $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$ tel que $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{u}^{(i)}$. (Notons que les $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont uniquement déterminés puisque $\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(n)}\}$ est une base de V.) On peut alors utiliser les uplets plutôt que les vecteurs originaux dans l'espace vectoriel.

Nous allons maintenant voir que l'on peut exprimer toute application linéaire à l'aide d'une matrice, ce qui nous permettre se concentrer sur les applications linéaires de la forme $T(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$, où $\mathbf{A}$ est une matrice. La matrice va dépendre du choix de la base ordonnée du domaine et du choix de la base ordonnée du codomaine.

Soient V et W des espaces vectoriels à scalaires dans un corps $\mathbb{K}$. Soient $\Gamma = \left(\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}\right)$ une base ordonnée de V et $\Omega = \left(\mathbf{w}^{(1)}, \ldots, \mathbf{w}^{(m)}\right)$ une base ordonnée de W.

Si $T : V \to W$ est une application linéaire, on peut calculer sa représentation matricielle comme suit :

Pour chaque $j \in \{1, \ldots, n\}$, $T\left(\mathbf{v}^{(j)}\right)$ est un vecteur de W. Donc, on peut écrire $T\left(\mathbf{v}^{(j)}\right)$ en tant que combinaison linéaire de $\mathbf{w}^{(1)}, \ldots, \mathbf{w}^{(m)}$. Ainsi, il existe des scalaires $a_{1,j}, a_{2,j}, \ldots, a_{m,j}$ tels que

$$T(\mathbf{v}^{(j)}) = a_{1,j}\mathbf{w}^{(1)} + a_{2,j}\mathbf{w}^{(2)} + \cdots + a_{m,j}\mathbf{w}^{(m)}.$$

Soit $\mathbf{u} \in V$. Alors il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{v}^{(1)} + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}^{(n)}$, d'où $[\mathbf{u}]_\Gamma = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$.

Nous avons alors

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}) &= T\left(\lambda_1\mathbf{v}^{(1)} + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}^{(n)}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j T\left(\mathbf{v}^{(j)}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\mathbf{w}^{(i)}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} (a_{i,j}\lambda_j)\mathbf{w}^{(i)} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\lambda_j\right)\mathbf{w}^{(i)}, \end{aligned}$$

et

$$[T(\mathbf{u})]_\Omega = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\lambda_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2,j}\lambda_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{m,j}\lambda_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Si $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ est telle que $\mathbf{A}_{i,j} = a_{i,j}$, alors $[T(\mathbf{u})]_\Omega$ est précisément $\mathbf{A}[\mathbf{u}]_\Gamma$.

Ainsi, pour un $\mathbf{u} \in V$ donné, on peut obtenir la représentation de $T(\mathbf{u})$ par un uplet par rapport à Ω en calculant $\mathbf{A}[\mathbf{u}]_\Gamma$. La matrice $\mathbf{A}$ est appelée la **matrice de représentation de T par rapport à Γ et Ω** et est dénotée par $[T]_\Gamma^\Omega$.

Notons que la i-ième colonne de $[T]_\Gamma^\Omega$ est donnée par $[T(\mathbf{v}^{(i)})]_\Omega$.

Exemple 8.10. Soit $T : \mathbb{R}^3 \to P_2(\mathbb{R})$ une application linéaire donnée par

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = (a-b)x^2 + cx + (a+b+c).$$

Soit $\Gamma = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ et $\Omega = (x+1, x^2-x, x^2+x-1)$. Trouvons maintenant $[T]_\Gamma^\Omega$.

On vérifier facilement que Γ et Ω sont des bases ordonnées pour $\mathbb{R}^3$ et $P_2(\mathbb{R})$, respectivement.

La matrice recherché prend la forme $[T]_{\Gamma}^{\Omega} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}$, où

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \alpha_1(x+1) + \beta_1(x^2 - x) + \gamma_1(x^2 + x - 1)$$
$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \alpha_2(x+1) + \beta_2(x^2 - x) + \gamma_2(x^2 + x - 1)$$
$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \alpha_3(x+1) + \beta_3(x^2 - x) + \gamma_3(x^2 + x - 1).$$

Comme $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = x^2 + 1$, on doit avoir

$$x^2 + 1 = \alpha_1(x+1) + \beta_1(x^2 - x) + \gamma_1(x^2 + x - 1),$$

ou, de façon équivalente,

$$x^2 + 1 = (\beta_1 + \gamma_1)x^2 + (\alpha_1 - \beta_1 + \gamma_1)x + (\alpha_1 - \gamma_1).$$

La comparaison des coefficients donne

$$\begin{aligned} 1 &= \beta_1 + \gamma_1 \\ 0 &= \alpha_1 - \beta_1 + \gamma_1 \\ 1 &= \alpha_1 - \gamma_1, \end{aligned}$$

dont la solution unique est $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 1$, $\gamma_1 = 0$.

De façon similaire, on obtient

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 2 = \frac{4}{3}(x+1) + \frac{2}{3}(x^2 - x) - \frac{2}{3}(x^2 + x - 1)$$

et

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = x^2 + x = \frac{2}{3}(x+1) + \frac{1}{3}(x^2 - x) + \frac{2}{3}(x^2 + x - 1),$$

d'où $[T]_\Gamma^\Omega = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

On vérifie le rèsultat à l'aide de deux vecteurs particuliers, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Alors $T(\mathbf{u}) = -x^2 + 1$, $T(\mathbf{v}) = x + 1$, $[\mathbf{u}]_\Gamma = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $[\mathbf{v}]_\Gamma = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Soit $\mathbf{A} = [T]_\Gamma^\Omega$. Dans ce cas, $\mathbf{A}[\mathbf{u}]_\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ est la représentation par un uplet de $\frac{1}{3}(x+1) - \frac{1}{3}(x^2 - x) - \frac{2}{3}(x^2 + x - 1) = -x^2 + 1 = T(\mathbf{u})$, et $\mathbf{A}[\mathbf{v}]_\Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ qui est la représentation par un uplet de $x + 1 = T(\mathbf{v})$.

Les section précédents établissent un cadre unificateur pour les applications linéaires, les matrices, les uplets, et les vecteurs. De façon générique, il n'y a pas de différence fondamentale entre un espace vectoriel $(V, \mathbb{K})$ de dimension n et $\mathbb{K}^n$; c'est aussi le cas pour les matrices $\mathbb{K}^{m \times n}$ et l'espace des applications linéaires $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$.

Exercices

1. Soit $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire. Soit $\Gamma = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ et $\Omega = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ des bases ordonnées de $\mathbb{R}^2$.

   a. Supposons que T est donnée par $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$. Trouvez $[T]_\Gamma^\Omega$.

   b. Supposons que $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Trouvez $[T]_\Gamma^\Omega$.

Solutions

1. a. Notons que
$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$
et
$$T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + (-3)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$
Donc, $[T]_{\Gamma}^{\Omega} = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & -3\end{bmatrix}$.

   b. En se basant sur les informations données, on voit que
$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2x_1 + x_2\\x_1 - x_2\end{bmatrix}.$$
Donc, $[T]_{\Gamma}^{\Omega} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}$.

8.6 Retour sur les changements de bases.

Rappelons que pour tout espace vectoriel V de dimension n et toutes bases ordonnées Γ et Ω de V, il existe une unique matrice $\mathbf{A}$ telle que $[\mathbf{u}]_\Omega = \mathbf{A}[\mathbf{u}]_\Gamma$ pour chaque $\mathbf{u} \in V$. La matrice en question est construite à l'aide de l'application linéaire identité, dénotée par id, pour laquelle $\mathrm{id}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ pour chaque $u \in V$. Autrement dit, $[\mathrm{id}]_\Gamma^\Omega$ est exactement la **matrice de changement de base** de Γ à Ω recherchée. Notons que cette matrice est nécessairement inversible puisque id est une bijection.

Exemple 8.11. Soient $\Gamma = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$ et $\Omega = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ des bases ordonnées de $\mathbb{R}^2$. Afin de obtenir la matrice de changement de base de Γ à Ω, écrivons tout d'abord chacun des vecteurs de Γ en tant que combinaison linéaire des vecteurs de Ω. Notons que

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

d'où la matrice changement de base de Γ à Ω est $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercices

1. Soient $\Gamma = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ et $\Omega = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ des bases ordonnées de $\mathbb{R}^2$ Déterminez la matrice changement de base de Γ à Ω.
2. Soit $\Gamma = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ une base ordonnée de $\mathbb{R}^2$. Si $[\mathrm{id}]_\Gamma^\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, que doit être Ω ?

Solutions

1. Notons que
$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$
et
$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}.$$
Donc, la matrice changement de base est $\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$.
2. Supposons que Ω soit donnée par $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Nous devons avoir
$$\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = 0\mathbf{u} + 1\mathbf{v}$$
et
$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = 1\mathbf{u} + 0\mathbf{v}.$$
Donc, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$.

8.7 Espace dual

8.7.1 Fonctionnelle linéaire

Soit $(V, \mathbb{K})$ un espace vectoriel. Une application linéaire $f : V \to \mathbb{K}$ est appelé une **fonctionnelle linéaire** (ou une **forme linéaire**). Une fonctionnelle linéaire est donc un cas spécial d'application linéaire.

Exemple 8.12. Soit P l'espace vectoriel des polynômes en x à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$. Soit $a \in \mathbb{K}$. Alors $f_a : P \to \mathbb{K}$ donnée par $f_a(q) = q(a)$ est une fonctionnelle linéaire. En effet, pour $s, t \in P$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on calcule

$$\begin{aligned} f_a(\lambda s + t) &= (\lambda s + t)(a) \\ &= \lambda s(a) + t(a) \\ &= \lambda f_a(s) + f_a(t), \end{aligned}$$

ce qui implique que f_a est une application linéaire.

Remarques.

1. La fonctionnelle linéaire f_a de l'exemple 8.12 porte le nom de **fonctionnelle d'évaluation**; elle est utilisée pour l'interpolation de Lagrange.
2. Les fonctionnelles linéaires sont utilisées dans les représentations hilbertiennes de systèmes de mécanique quantique.

8.7.2 Espace dual algébrique

Pour un espace vectoriel V, il est possible de vérifier que l'ensemble de toutes les fonctionnelles linéaires forment un espace vectoriel lorsque l'addition de vecteurs est donné par l'addition de fonctions et la multiplication par un scalaire est donnée par la multiplication d'une fonction par un scalaire. Cet espace vectoriel est appelé **l'espace dual algébrique** de V et est dénoté par V^*.

Exemple 8.13. Soit $V = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ -2a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$. On obtient une description de V^* de manière suivante.

Si $f : V \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle linéaire alors, par linéarité de f,

$$f\left(\begin{bmatrix} a \\ -2a \end{bmatrix} \right) = af\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$. Donc, f est complètement déterminé par le vecteur qu'elle associe à $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$. On peut alors voir que V^* consiste de toutes les functions $f : V \to \mathbb{R}$ définies par

$$f\left(\begin{bmatrix} a \\ -2a \end{bmatrix}\right) = \gamma a,$$

où $\gamma \in \mathbb{R}$.

Proposition 8.3. *Soient V un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ et $\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(n)}\}$ une base de V. Alors, $\left\{f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}\right\}$ est une base de V^* où*

$$f^{(j)}\left(\sum_{i=1} \alpha_i \mathbf{u}^{(i)}\right) = \alpha_j$$

pour chaque $j \in \{1, \ldots, n\}$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

Corollaire 8.1. *Si V est un espace vectoriel de dimension finie, alors V et V^* sont isomorphes.*

Exercices

1. Soit V un sous-espace de $P_2(\mathbb{R})$ tel que pour tout $p \in V$, $p(0) = 0$. Donnez une description de V^*.
2. Démontrez la proposition 8.3.

Solutions

1. On observe que $V = \{ax^2 + bx \ : \ a, b \in \mathbb{R}\}$. Alors, V^* consiste de toutes les fonctions $f : V \to \mathbb{R}$ données par

$$f(ax^2 + bx) = \delta a + \gamma b,$$

où $\delta, \gamma \in \mathbb{R}$.

2. On commence par montrer que l'espace vectoriel engendré par $\left\{f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}\right\}$ est V^*. Soit $f \in V^*$. Alors pour tous $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1} \alpha_i \mathbf{u}^{(i)}\right) = \alpha_j &= \sum_{i=1} \alpha_i f(\mathbf{u}^{(i)}) \\ &= \sum_{j=1} f(\mathbf{u}^{(j)}) \alpha_j \\ &= \sum_{j=1} f(\mathbf{u}^{(j)}) f^{(j)}\left(\sum_{i=1} \alpha_i \mathbf{u}^{(i)}\right). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que f est une combinaison linéaire de $f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}$, appartenant ainsi à l'espace vectoriel engendré par $\left\{f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}\right\}$.

Montrons maintenant que $\left\{f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}\right\}$ est un ensemble linéairement indépendant. Supposons que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ satisfont à

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f^{(j)}(\mathbf{x}) = 0,$$

pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{K}$. On doit avoir $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

En effet, puisque

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f^{(j)}(\mathbf{x}) = 0$$

pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{K}$, il s'ensuit que

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f^{(j)}(\mathbf{u}^{(i)}) = 0$$

pour $i = 1, \ldots, n$. Cependant, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f^{(j)}(\mathbf{u}^{(i)}) = \lambda_i.$$

Ainsi, $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, tel que désiré.

8.8 Exemple de test portant sur la matière de ce chapitre

1. Soit $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que $T\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ et $T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$. Que vaut $T\left(\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}\right)$?

2. Considérez l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ définie par $T\left(\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2a+b+c & a-d\\ a+b+c-d & 0\end{bmatrix}$.

   a. Trouvez une base de l'image de T.

   b. Trouvez une base du noyau de T.

   c. T est-elle surjective? Injective?

3. Soient $\mathbb{K} = GF(2)$ et $T : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^3$ l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x_1+x_2+x_4\\x_1+x_3+x_4\\x_2+x_3+x_4\end{bmatrix}.$$

   Trouvez une base du noyau de T.

4. Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x_1+x_2+x_3\\-x_1-x_2+x_3\\x_2-x_3\end{bmatrix}$.

   Déterminez si T est inversible.

5. Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x_1+x_2\\-x_1-x_2+x_3\end{bmatrix}$.

   Soit $\Gamma = \left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right)$ une base ordonnée de $\mathbb{R}^3$ et soit $\Omega = \left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right)$ une base ordonnée de $\mathbb{R}^2$. Déterminez $[T]_\Gamma^\Omega$.

6. Soit $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$T(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} 2a - b \\ b + 2c \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Déterminez la dimension du noyau de T.

7. Soit V le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ définie par $\left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ a - b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Trouvez une base de l'espace dual algébrique V^*.

Chapitre 9

Produits scalaires

Ce chapitre fera le point sur certains produits de vecteurs dont la résultante est un scalaire. La définition du produit de deux vecteurs a une histoire fascinante (consulter Crowe (1967), par exemple). La maîtrise du matériel dans ce chapitre permet de :

— Définir et calculer des produits scalaires.
— Généraliser les produits scalaires.
— Définir et identifier les formes bilinéaires symétriques.

Les connaissances requises pour ce chapitre incluent les nombres complexes, l'algèbre des matrices, les espaces vectoriels, et la trigonométrie de base.

9.1 Produit scalaire usuel

Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Le **produit scalaire usuel** de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$, que l'on dénote par $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, est défini par

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

En utilisant la convention qu'une matrice de dimension 1×1 est équivalente à l'élément qu'elle contient, il s'ensuit que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v}$.

Par exemple, si $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, alors

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1)(4) + (2)(5) + (3)(6) = 4 + 10 + 18 = 32.$$

Faites attention : la notation du produit scalaire usuel est identique à celle de la multiplication dans un corps. Le contexte de l'utilisation de ce symbole devrait aider à clarifier la situation, mais la confusion demeure possible.

Le produit scalaire usuel est un ingrédient important de la modélisation de l'espace euclidien. On énumère certaines de ses propriétés :

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.
2. $\mathbf{u} \cdot (\lambda \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ pour tout scalaire λ.
3. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})$.

En terme de l'ordre des opérations, le produit scalaire usuel se calcule avant l'addition vectorielle. Ainsi, la troisième propriété peut s'écrire tout simplement comme

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}.$$

9.1.1 Longueur d'un vecteur

Le produit scalaire usuel induit une notion de longueur dans $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. On définit $\|\mathbf{u}\|$ par $\sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$.

Ainsi, $\| \cdot \|$ est une **fonction de norme** qui satisfait aux propriétés suivantes :

1. $\|\mathbf{u}\| \geq 0$.
2. $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$.
3. $\|\mathbf{u}\| = 0$ si et seulement si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
4. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.
5. $\|\alpha \mathbf{u}\| = |\alpha| \|\mathbf{u}\|$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

La vérification de ces propriétés est laissée en exercice.

On appelle $\|\mathbf{u}\|$ la **norme de** $\mathbf{u}$. Un vecteur de norme 1 est appelé **vecteur unitaire**.

9.1.2 Angle entre deux vecteurs Il est possible de démontrer que pour tous

$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, où n est un entier positif,

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|.$$

Cette inégalité porte le nom **d'inégalité de Cauchy-Schwarz**. Une preuve de ce résultat est présentée plus tard dans un contexte plus général.

On en conclut que $\dfrac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \leq 1$ si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont non nuls. De cette inégalité découle la *définition* de **l'angle entre** $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$: c'est l'angle θ entre 0 et π tel que $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$. (Les radians sont utilisés pour la mesure des angles.)

Lorsque $n = 2$, il n'est pas difficile de vérifier que l'angle θ est précisément l'angle entre le segment joignant l'origine à $\mathbf{u}$ et le segment joignant l'origine à $\mathbf{v}$. C'est également le cas lorsque $n = 3$, même si cela peut être plus difficile à voir. Cette définition nous permet alors de généraliser la notion d'un angle entre deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ pour $n > 3$.

On dit que les vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ sont **orthogonaux** si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, deux vecteurs non nuls sont orthogonaux précisément lorsqu'ils forment un angle droit.

Si $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sont orthogonaux, alors

$$\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2.$$

Ce résultat est mieux connu sous le nom du **théorème de Pythagore**. Pour démontrer ce résultat, il suffit de constater que

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \\
&= (\mathbf{u} + \mathbf{v})^\mathsf{T}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \\
&= \mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{u} + \mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v} + \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{u} + \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{v} \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 + 0 + 0 + \|\mathbf{v}\|^2 \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2.
\end{aligned}$$

Exemple 9.1. Soient $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Soit θ l'angle entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. Puisque

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{(2)(0) + (0)(-1)}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = 0,$$

alors $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Exemple 9.2. Soient $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Soit θ l'angle entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. Puisque

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = \frac{(3)(0) + (3)(2)}{\sqrt{3^2 + 3^2}\sqrt{0^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{18}\sqrt{4}} = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

alors $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Exercices

1. Calculez l'angle entre $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (en radians). Estimez votre réponse en utilisant 4 chiffres après la virgule.
2. Trouvez la norme de $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$.

3. Trouvez un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ qui est orthogonal aux deux vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solutions

1. Soit θ l'angle entre $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   Alors,
   $$\cos\theta = \frac{2-2-1}{\sqrt{1+4+1}\sqrt{4+1+1}} = -\frac{1}{6},$$
   et $\theta = 1{,}7382$ radians.

2. $\left\| \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5.$

3. Un vecteur $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ si et seulement si
   $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
   Une solution non trivial est donnée par $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, d'où $\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ est un vecteur unitaire orthogonal aux deux vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

9.2 Forme bilinéaire symétrique

Le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ nous permet de combiner deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ afin d'obtenir un scalaire. Nous allons maintenant étudier un procédé plus général, qui s'avère être beaucoup plus qu'une curiosité théorique. Pour un exemple d'une application utilisant une notion plus générale que le produit scalaire usuel, consulter Abril *et al.* (2015).

Rappelons que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v}$ pour $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. La symétrie du produit scalaire usuel est immédiate : $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.

Notons que l'on peut réécrit $\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v}$ comme $\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{I}_n\mathbf{v}$. En remplaçant $\mathbf{I}_n$ par une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ arbitraire, nous obtenons $\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v}$, qui est aussi un scalaire. La fonction $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v}$, se comporte de bien des façons comme le produit scalaire usuel.

Cependant, la symétrie $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = B(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ n'est garantie que si la matrice $\mathbf{A}$ est symétrique. Cette supposition doit donc être ajoutée. La fonction B ainsi définie est appelée **forme billinéaire symétrique** sur $\mathbb{R}^n$. Le nom vient du fait que pour un vecteur fixé $\mathbf{u}$, la fonction $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $T(\mathbf{v}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ est linéaire, et pour un vecteur fixé $\mathbf{v}$, la fonction $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $T(\mathbf{u}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ l'est également.

Une **forme quadratique** q dans $\mathbb{R}^n$ est définie par $q(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{u}$ pour $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ quelconque.

Rappelons que le produit scalaire usuel induit une norme $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$ possédant les propriétés suivantes :

1. $\|\mathbf{u}\| \geq 0$.
2. $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$.
3. $\|\mathbf{u}\| = 0$ si et seulement si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
4. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.
5. $\|\alpha\mathbf{u}\| = |\alpha|\|\mathbf{u}\|$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si on défini $\|\cdot\|$ par $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{u}}$, quelles autres hypothèses doit-on apporter sur $\mathbf{A}$ pour obtenir une norme?

Puisque la fonction racine carrée n'est définie que sur l'ensemble des nombres réels non négatifs, on doit avoir $\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{u} \geq 0$ pour tout $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, avec égalité si et seulement si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ si on veut en plus satisfaire à la propriété 3. En admettant cette supposition supplémentaire, une forme plus générale de l'inégalité de Cauchy-Schwarz suit :

$$(\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v})^2 \leq (\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{u})(\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v}).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz originale est obtenue en substituant $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ dans l'inégalité précédente. Les cinq propriétés préalablement peuvent maintenant être vérifiées.

On présente maintenant une démonstration de

$$(\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v})^2 \leq (\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{u})(\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v}).$$

De toute évidence, l'inégalité est valide si $\mathbf{u}$ ou $\mathbf{v}$ est nul.

Supposons que $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, et posons $t = \frac{\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v}}{\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{u}}$. Alors, $0 \leq \|t\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$. Mais

$$\begin{aligned} 0 \leq \|t\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 &= (t\mathbf{u} - \mathbf{v})^\mathsf{T}\mathbf{A}(t\mathbf{u} - \mathbf{v}) \\ &= t^2\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{u} - 2t\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v} \\ &= \frac{(\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v})^2}{\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{u}} - 2\frac{(\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v})^2}{\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{u}} + \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v} \\ &= -\frac{(\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v})^2}{\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{u}} + \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v}, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{(\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v})^2}{\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{u}} \leq \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v},$$

ce qui implique que

$$(\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v})^2 \leq (\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{u})(\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v})$$

tel que désiré.

9.2.1 Matrices définies positives

Une matrice symétrique $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que $\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{u} > 0$ pour tout $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ est dite **définie positive**.

Il y a trois autres types de matrices définies :

- Une matrice symétrique $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que $\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{u} \geq 0$ pour tout $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ est dite **semi-définie positive**.
- Une matrice symétrique $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est dite **définie négative** si $-\mathbf{A}$ est définie positive.
- Une matrice symétrique $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est dite **semi-définie négative** si $-\mathbf{A}$ est semi-définie positive.

Exemple 9.3. La matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ est définie positive. En effet, si $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{u} &= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3u_1 + 2u_2 \\ 2u_1 + 3u_2 \end{bmatrix} \\
&= 3u_1^2 + 4u_1u_2 + 3u_2^2 \\
&= 3\left(u_1^2 + \frac{4}{3}u_1u_2 + \left(\frac{2}{3}u_2\right)^2\right) + \frac{5}{3}u_2^2 \\
&= 3\left(u_1 + \frac{2}{3}u_2\right)^2 + \frac{5}{3}u_2^2 \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Pour le moment, l'identification de matrices (semi-)définies positive semble requérir des manipulations algébriques complexes. Cependant, nous verrons plus tard que toute matrice symétrique réelle $\mathbf{A}$ peut s'écrire comme $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{D}\mathbf{Q}$ pour des matrices $\mathbf{Q}, \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, où $\mathbf{D}$ est une matrice diagonale ayant les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sur sa diagonale. Ceci nous permet de conclure que $\mathbf{A}$ est définie positive si et seulement si toutes les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont positives et que $\mathbf{A}$ est semi-définie positive si et seulement si les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont non négatives.

Exercices

1. Montrez que $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ est définie positive.
2. Une forme symétrique bilinéaire est un cas spécial d'une forme bilinéaire. Si V et W sont des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$, $B : V \times W \to \mathbb{K}$ est une **forme bilinéaire** si les conditions suivantes sont satisfaites :
   — Pour chaque $\mathbf{y} \in W$, $f : V \to \mathbb{K}$ définie par $f(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est une fonctionnelle linéaire sur V.
   — Pour chaque $\mathbf{x} \in V$, $f : W \to \mathbb{K}$ définie par $f(\mathbf{y}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est une fonctionnelle linéaire sur W.

   Montrez que $B : V^* \times V \to \mathbb{K}$ définie par $B(f, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ est une forme bilinéaire.

   Rappel : V^* dénote l'espace duel de V.

Solutions

1. Soit $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{u} &= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4u_1 + u_2 \\ u_1 + 2u_2 \end{bmatrix} \\
&= 4u_1^2 + 2u_1u_2 + 2u_2^2 \\
&= 4\left(u_1^2 + \frac{1}{2}u_1u_2 + \left(\frac{1}{4}u_2\right)^2\right) + \frac{7}{4}u_2^2 \\
&= 4\left(u_1 + \frac{1}{4}u_2\right)^2 + \frac{7}{4}u_2^2 \\
&> 0.
\end{aligned}$$

2. Soit $\mathbf{u} \in V$. Pour $f, g \in V^*$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
B(\lambda f + g, \mathbf{u}) &= (\lambda f + g)(\mathbf{u}) \\
&= \lambda f(\mathbf{u}) + g(\mathbf{u}) \\
&= \lambda B(f, \mathbf{u}) + B(g, \mathbf{u}).
\end{aligned}$$

Donc, $B(\cdot, \mathbf{u})$ est une fonctionnelle linéaire sur V^*.

Soit $f \in V^*$. Pour $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
B(f, \lambda\mathbf{u} + \mathbf{w}) &= f(\lambda\mathbf{u} + \mathbf{w}) \\
&= \lambda f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{w}) \\
&= \lambda B(f, \mathbf{u}) + B(f, \mathbf{w}).
\end{aligned}$$

Alors, $B(f, \cdot)$ est une fonctionnelle linéaire sur V.

Il s'ensuit que B est une forme bilinéaire.

9.3 Produit scalaire

Cette section sera consacrée à une autre généralisation du produit scalaire, en particulier pour les espaces vectoriels à scalaires dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les produits scalaires ainsi définis ont des applications dans des domaines comme les traitements des signaux et la physique quantique.

Soit $(V, \mathbb{K})$ un espace vectoriel où $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ est appelé un **produit scalaire** sur V si, pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in V$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle}$.
2. $\langle \lambda \mathbf{u} + \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle$.
3. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ avec égalité si et seulement si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Exemple 9.4. On voit aisément le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}$.

Exemple 9.5. Le **produit scalaire usuel** sur $\mathbb{C}^n$ est défini par $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \overline{\mathbf{w}^\mathsf{T}} \mathbf{u}$. Notons que lorsque l'on restreint $\mathbf{u}$ et $\mathbf{w}$ à $\mathbb{R}^n$, ce produit scalaire est réduit au produit scalaire usuel.

$\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$ sont **orthogonaux** par rapport au produit scalaire si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0$.

En définissant

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle},$$

il n'est pas difficile de vérifier que les propriétés suivantes sont satisfaites :

1. $\|\mathbf{u}\| \geq 0$.
2. $\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| = \|\mathbf{w} - \mathbf{u}\|$.
3. $\|\mathbf{u}\| = 0$ si et seulement si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
4. $\|\alpha \mathbf{u}\| = |\alpha| \|\mathbf{u}\|$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$.

Théorème 9.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{w}\|$.

Démonstration. Il suffit de montrer que $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle|^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle$.

Soit $\lambda = \frac{\overline{\langle \mathbf{u},\mathbf{w}\rangle}}{\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle}$. Alors,

$$\begin{aligned}
0 \leq \|\lambda\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2 &= \langle \lambda\mathbf{u} - \mathbf{w}, \lambda\mathbf{u} - \mathbf{w}\rangle \\
&= \lambda\langle \mathbf{u}, \lambda\mathbf{u} - \mathbf{w}\rangle - \langle \mathbf{w}, \lambda\mathbf{u} - \mathbf{w}\rangle \\
&= \lambda\overline{\langle \lambda\mathbf{u} - \mathbf{w}, \mathbf{u}\rangle} - \overline{\langle \lambda\mathbf{u} - \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle} \\
&= \lambda\left(\overline{\lambda}\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{u}\rangle}\right) - \left(\overline{\lambda\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle} - \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle\right) \\
&= \lambda\overline{\lambda}\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - \lambda\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle - \overline{\lambda\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle} + \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle \\
&= \frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle|^2}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle} - \frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle|^2}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle} - \frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle|^2}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle} + \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle \\
&= -\frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle|^2}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle} + \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle,
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle|^2}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle} \leq \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle,$$

ce qui implique que

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle|^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle,$$

tel que désiré. □

Théorème 9.2 (Inégalité triangulaire)**.** $\|\mathbf{u} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{w}\|$.

Démonstration. Notons que

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} + \mathbf{w}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{u} + \mathbf{w}\rangle \\
&= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} + \mathbf{w}\rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} + \mathbf{w}\rangle \\
&= \overline{\langle \mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{u}\rangle} + \overline{\langle \mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle} \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle + \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle} + \|\mathbf{w}\|^2 \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\mathfrak{Re}\left(\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle\right) + \|\mathbf{w}\|^2 \\
&\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\left|\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle\right| + \|\mathbf{w}\|^2 \\
&\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{w}\| + \|\mathbf{w}\|^2 \\
&= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{w}\|)^2.
\end{aligned}$$

Le résultat suit maintenant en prenant les racines carrées de chaque côté. □

Exercices

1. Soient $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1-i \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} i \\ 1+i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$. Évaluez $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle$ où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel.

2. Soit un espace vectoriel V muni d'un produit scalaire. Démontrez que si $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$ sont orthogonaux, alors

$$\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{w}\|^2.$$

(Ce résultat est connu comme le **théorème de Pythagore**.)

3. Soit un espace vectoriel V muni d'un produit scalaire. Montrez que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{z} \rangle$ pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in V$.

Solutions

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \overline{\mathbf{w}^{\mathsf{T}}}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-i \\ 2 \end{bmatrix} = 1 - i + 2 - 2i = 3 - 3i.$

2. Notons que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{w}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{u} + \mathbf{w} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} + \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} + \mathbf{w} \rangle \\ &= \overline{\langle \mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle} + \overline{\langle \mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle} \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle} + \|\mathbf{w}\|^2 \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 0 + \overline{0} + \|\mathbf{w}\|^2 \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 \end{aligned}$$

3. Notons que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} + \mathbf{z} \rangle &= \overline{\langle \mathbf{w} + \mathbf{z}, \mathbf{u} \rangle} \\ &= \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{z}, \mathbf{u} \rangle} \\ &= \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle} + \overline{\langle \mathbf{z}, \mathbf{u} \rangle} \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{z} \rangle. \end{aligned}$$

9.4 Exemple de test portant sur la matière de ce chapitre

1. Quel est l'angle entre les vecteurs $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ dans $\mathbb{R}^2$? Donnez la réponse en radians, arrondie à 4 places après la virgule.
2. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ une matrice symétrique. Montrez qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{A}+\gamma\mathbf{I}_n$ est semi-définie positive.
3. Soit $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}1-2i\\ i\end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$ Déterminez tous les $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^2$ orthogonaux à $\mathbf{u}$ par rapport au produit scalaire usuel.
4. La trace d'une matrice carrée $\mathbf{A}$, dénotée par $\mathrm{tr}(\mathbf{A})$, est la somme des éléments sur sa diagonale. Montrez que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B}\rangle = \mathrm{tr}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A})$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Chapitre 10

Orthogonalité

Ce chapitre introduit les bases orthogonales et orthonormées d'un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. L'importante notion d'orthogonalité de vecteurs est réintroduite et ses propriétés sont déduites. L'orthogonalité a d'importantes applications dans plusieurs domaines tels que ingénierie et les statistiques. Une maîtrise solide des concepts de ce chapitre est essentielle pour toute étude approfondie des applications qui requièrent l'orthogonalité. La maîtrise du matériel de ce chapitre permet de :

- Définir les bases orthogonales et orthonormées.
- Décrire le procédé de Gram-Schmidt.
- Construire une base orthogonale et orthonormée d'un sous-espace d'un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
- Définir la somme directe et les projections orthogonales.
- Énoncer, démontrer et appliquer la formule de projection orthogonale.
- Obtenir une décomposition QR pour une matrice réelle.
- Énoncer et démontrer le théorème des axes principaux.
- Obtenir une diagonalisation orthogonale d'une matrice symétrique réelle.
- Résoudre des problèmes de minimisation de fonctions quadratiques.

Les connaissances requises pour ce chapitre incluent l'algèbre des matrices, les espaces vectoriels, et les produits scalaires.

10.1 Bases orthonormées

Soit $(V, \mathbb{K})$ un espace vectoriel de dimension k muni d'un produit scalaire où $\mathbb{K}$ dénote $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On dit qu'une base $\left\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)}\right\}$ de V est une **base orthogonale** si $\mathbf{u}^{(i)}$ et $\mathbf{u}^{(j)}$ sont orthogonales (c'est-à-dire $\langle \mathbf{u}^{(i)}, \mathbf{u}^{(j)} \rangle = 0$) pour tous $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, $i \neq j$.

Une base orthogonale $\left\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)}\right\}$ de V est appelée **base orthonormée** si de plus $\mathbf{u}^{(i)}$ est un vecteur unitaire (c'est-à-dire que $\|\mathbf{u}^{(i)}\| = 1$) pour chaque $i = 1, \ldots, k$.

Exemple 10.1. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.

Exemple 10.2. $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\}$ est une base orthonormée du noyau de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, muni du produit scalaire usuel.

Les bases orthonormées permettent d'obtenir facilement la représentation par uplet d'un vecteur. Soit $\left\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)}\right\}$ une base orthonormale de V. Si Γ dénote la base ordonnée $\left(\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)}\right)$, alors pour tout $\mathbf{v} \in V$, $[\mathbf{v}]_\Gamma$ est donné par $\begin{bmatrix} \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}^{(1)} \rangle \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}^{(2)} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}^{(k)} \rangle \end{bmatrix}$.

Par exemple, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ appartient au noyau de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Si $\Gamma = \left(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}\right)$ où $\mathbf{u}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{u}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, on obtient

$$[\mathbf{v}]_\Gamma = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}^{(1)} \rangle \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}^{(2)} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

On peut vérifier que $\mathbf{v} = \sqrt{5}\mathbf{u}^{(1)} - \sqrt{2}\mathbf{u}^{(2)}$.

De façon plus générale, voyons maintenant pourquoi $[\mathbf{v}]_\Gamma = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}^{(1)} \rangle \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}^{(2)} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}^{(k)} \rangle \end{bmatrix}$.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des scalaires tels que $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{u}^{(1)} + \cdots + \lambda_k \mathbf{u}^{(k)}$.

Alors

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}^{(i)} \rangle &= \langle \lambda_1 \mathbf{u}^{(1)} + \cdots + \lambda_k \mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{u}^{(i)} \rangle \\ &= \lambda_1 \langle \mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(i)} \rangle + \cdots + \lambda_k \langle \mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{u}^{(i)} \rangle \\ &= \lambda_i \langle \mathbf{u}^{(i)}, \mathbf{u}^{(i)} \rangle \\ &= \lambda_i \|\mathbf{u}^{(i)}\|^2 \\ &= \lambda_i, \end{aligned}$$

pour chaque $i = 1, \ldots, k$, tel que désiré.

10.1.1 Matrice orthogonale

Si $\left\{\mathbf{q}^{(1)}, \ldots, \mathbf{q}^{(n)}\right\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, alors la matrice $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{(1)} & \cdots & \mathbf{q}^{(n)} \end{bmatrix}$ possède la propriété suivante :

$$\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}_n.$$

Pour démontrer ce résultat, notons que l'élément (i, j) de $\mathbf{Q}$ est donné par

$$\mathbf{q}^{(i)\mathsf{T}}\mathbf{q}^{(j)} = \mathbf{q}^{(i)} \cdot \mathbf{q}^{(j)} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Puisque $\mathbf{Q}$ est une matrice carrée, on voit que $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}$, d'où $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{I}_n$.

Une matrice $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfaisant à $\mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^\mathsf{T} = \mathbf{I}_n$ est appelée **matrice orthogonale.** Les matrices orthogonales apparaissent dans plusieurs applications, tout comme les matrices hermitiennes (ou auto-adjointes) qui généralisent la notion d'orthogonalité des matrices aux complexes.

Exercices

1. Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Soient $\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)} \in V$ tels que $\mathbf{u}^{(i)} \neq \mathbf{0}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$ et $\langle \mathbf{u}^{(i)}, \mathbf{u}^{(j)} \rangle = 0$ pour tous $i, j \in$

$\{1, \ldots, k\}$, $i \neq j$. Démontrez que $\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)}\}$ est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants.

2. Dans cette exercice, $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire usuel.

   a. Construisez une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$ contenant $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

   b. Construisez une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$ contenant $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. On sait [1] que la matrice

$$\frac{1}{n}\begin{bmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & 2(-ad+bc) & 2(ac+bd) \\ 2(ad+bc) & a^2-b^2+c^2-d^2 & 2(-ab+cd) \\ 2(-ac+bd) & 2(ab+cd) & a^2-b^2-c^2+d^2 \end{bmatrix}$$

est orthogonale pour tous $a, b, c, d, n \in \mathbb{Z}$, où $n = a^2+b^2+c^2+d^2$ est impair. Montrez en utilisant des calculs directs que la matrice obtenue en substituant $a = b = c = 1$ et $d = 2$ est bien orthogonale.

1. Voir https://math.stackexchange.com/q/279426 et l'article cité.

Solutions

1. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des scalaires tels que

$$\lambda_1 \mathbf{u}^{(1)} + \cdots + \lambda_k \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{0}.$$

Ainsi, pour chaque $i \in \{1, \ldots, k\}$,

$$0 = \langle \mathbf{0}, \mathbf{u}^{(i)} \rangle = \langle \lambda_1 \mathbf{u}^{(1)} + \cdots + \lambda_k \mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{u}^{(i)} \rangle = \lambda_i \|\mathbf{u}^{(i)}\|^2.$$

Or $\mathbf{u}^{(i)} \neq \mathbf{0}$ pour chaque $i \in \{1, \ldots, k\}$, d'où $\lambda_i = 0$ pour chaque $i \in \{1, \ldots, k\}$, ce qui termine la démonstration.

2. a. En utilisant le résultat de l'exercice précédent, on peut simplement choisir n'importe quel vecteur non nul orthogonal à $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, comme $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, par exemple.

b. De même, il suffit de trouver un vecteur non nul $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ tel que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

comme $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, par exemple.

3. Avec la substitution donnée dans l'exercice, la matrice devient

$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} -3 & -2 & 6 \\ 6 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Il est aisé de vérifier que cette matrice est bien orthogonale.

10.2 Procédé de Gram-Schmidt

Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire tel que $\dim(V) = k < \infty$. Nous allons maintenant voir comment il est possible de construire une base orthonormée de V à partir d'une base quelconque de V.

Soit $\left\{\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}\right\}$ une base de V, pas nécessairement orthonormée.

Nous allons construire $\left\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)}\right\}$ de façon itératif, de sorte que $\left\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(p)}\right\}$ soit une base orthonormée de $\mathrm{Vect}\left(\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(p)}\right)$ pour $p = 1, \ldots, k$.

Posons $\mathbf{u}^{(1)} = \frac{1}{\|\mathbf{v}^{(1)}\|}$.

Supposons que $\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(p-1)}\}$ est une base orthonormée de $\mathrm{Vect}\left(\left\{\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(p-1)}\right\}\right)$.

Nous devons trouver un vecteur unitaire $\mathbf{d}$ tel que $\langle \mathbf{d}, \mathbf{u}^{(i)} \rangle$ pour $i = 1, \ldots, p-1$ et tel que $\mathbf{v}^{(p)} = \lambda_1 \mathbf{u}^{(1)} + \cdots + \lambda_{p-1}\mathbf{u}^{(p-1)} + \alpha \mathbf{d}$ pour des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}, \alpha$. Laissant de côté pour le moment que $\mathbf{d}$ doit être unitaire, on résoud pour $\mathbf{d}$ dans le système suivant :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{d}, \mathbf{u}^{(1)} \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{d}, \mathbf{u}^{(2)} \rangle &= 0 \\ &\vdots \\ \langle \mathbf{d}, \mathbf{u}^{(p-1)} \rangle &= 0 \\ \lambda_1 \mathbf{u}^{(1)} + \cdots + \lambda_{p-1}\mathbf{u}^{(p-1)} + \alpha \mathbf{d} &= \mathbf{v}^{(p)} \end{aligned}$$

Notons que $\alpha \neq 0$ pour toute solution du système puisque $\mathbf{v}_p \notin \mathrm{Vect}\left(\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(p-1)}\}\right)$. La substitution $\mathbf{d} = \alpha^{-1}\mathbf{u}$ donne

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}^{(1)} \rangle &= 0 \\ \alpha^{-1}\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}^{(2)} \rangle &= 0 \\ &\vdots \\ \alpha^{-1}\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}^{(p-1)} \rangle &= 0 \\ \lambda_1 \mathbf{u}^{(1)} + \cdots + \lambda_{p-1}\mathbf{u}^{(p-1)} + \mathbf{u} &= \mathbf{v}^{(p)} \end{aligned}$$

ou, de façon équivalente,

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}^{(1)} \rangle &= 0\\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}^{(2)} \rangle &= 0\\ &\vdots\\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}^{(p-1)} \rangle &= 0\\ \lambda_1 \mathbf{u}^{(1)} + \cdots + \lambda_{p-1}\mathbf{u}^{(p-1)} + \mathbf{u} &= \mathbf{v}^{(p)}\end{aligned}$$

La dernière équation devient $\mathbf{u} = \mathbf{v}^{(p)} - \left(\lambda_1 \mathbf{u}^{(1)} + \cdots + \lambda_{p-1}\mathbf{u}^{(p-1)}\right)$. En substituant cette équation dans la i-ième équation, $i \in \{1, \ldots, p-1\}$, on obtient

$$\langle \mathbf{v}^{(p)} - \left(\lambda_1 \mathbf{u}^{(1)} + \cdots + \lambda_{p-1}\mathbf{u}^{(p-1)}\right), \mathbf{u}^{(i)} \rangle = 0,$$

qui se simplifie à $\langle \mathbf{v}^{(p)}, \mathbf{u}^{(i)} \rangle = \lambda_i$.

Ainsi, on doit avoir

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}^{(p)} - \left(\langle \mathbf{v}^{(p)}, \mathbf{u}^{(1)} \rangle \mathbf{u}^{(1)} + \langle \mathbf{v}^{(p)}, \mathbf{u}^{(2)} \rangle \mathbf{u}^{(2)} + \cdots + \langle \mathbf{v}^{(p)}, \mathbf{u}^{(p-1)} \rangle \mathbf{u}^{(p-1)}\right).$$

Notons que $\mathbf{u} \neq 0$ puisque $\mathbf{v}_p \notin \operatorname{Vect}\left(\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(p-1)}\}\right)$. On peut alors choisir $\mathbf{u}^{(p)} = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u}$.

Ce procédé porte le nom de **procédé de Gram-Schmidt**, et peut être résumé comme suit :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{(1)} &= \frac{1}{\|\mathbf{v}^{(1)}\|}\mathbf{v}^{(1)},\\ \mathbf{u}^{(2)} &= \frac{1}{\|\mathbf{r}^{(2)}\|}\mathbf{r}^{(2)},\\ &\vdots\\ \mathbf{u}^{(k)} &= \frac{1}{\|\mathbf{r}^{(k)}\|}\mathbf{r}^{(k)},\end{aligned}$$

où

$$\mathbf{r}^{(i)} = \mathbf{v}^{(i)} - \left(\langle \mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{u}^{(1)} \rangle \mathbf{u}^{(1)} + \langle \mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{u}^{(2)} \rangle \mathbf{u}^{(2)} + \cdots + \langle \mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{u}^{(i-1)} \rangle \mathbf{u}^{(i-1)}\right)$$

pour $i = 2, \ldots, k$.

Exemple 10.3. Soit $\mathbf{v}^{(1)} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{v}^{(2)} = \begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}$, et $\mathbf{v}^{(3)} = \begin{bmatrix}0\\-1\\2\\1\end{bmatrix}$ des vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. Nous allons appliquer le procédé

de Gram-Schmidt aux vecteurs $\{\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)}\}$ afin d'obtenir une base orthonormée de $\mathrm{Vect}\left(\{\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)}\}\right)$.

Notons d'abord que $\mathbf{u}^{(1)} = \frac{1}{\|\mathbf{v}^{(1)}\|}\mathbf{v}^{(1)} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$.

Ensuite, $\mathbf{r}^{(2)} = \mathbf{v}^{(2)} - (\mathbf{v}^{(2)} \cdot \mathbf{u}^{(1)})\mathbf{u}^{(1)} = \begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix} - 0\mathbf{u}^{(1)} = \begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}$. Ainsi, $\mathbf{u}^{(2)} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}$.
Notons ici que puisque $\mathbf{v}^{(2)}$ et $\mathbf{u}^{(1)}$ sont déjà orthogonaux, $\mathbf{u}^{(2)}$ est obtenu tout simplement en normalisant $\mathbf{v}^{(2)}$.

De plus,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^3 &= \mathbf{v}^{(3)} - \left((\mathbf{v}^{(3)} \cdot \mathbf{u}^{(1)})\mathbf{u}^{(1)} + (\mathbf{v}^{(3)} \cdot \mathbf{u}^{(2)})\mathbf{u}^{(2)}\right)\\ &= \begin{bmatrix}0\\-1\\2\\1\end{bmatrix} - \mathbf{u}^{(1)} - (-2)\mathbf{u}^{(2)}\\ &= \begin{bmatrix}0\\-1\\2\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Puisque $\|\mathbf{r}^{(3)}\| = 1$, on obtient $\mathbf{u}^3 = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$. Ainsi, $\left\{\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{u}^{(3)}\right\}$ est une base orthonormée de $\mathrm{Vect}\left(\left\{\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)}\right\}\right)$.

Exemple 10.4. Soient $\mathbf{v}^{(1)} = \begin{bmatrix}1\\i\\0\end{bmatrix}$, et $\mathbf{v}^{(2)} = \begin{bmatrix}0\\1-i\\-1\end{bmatrix}$, des vecteurs de $\mathbb{C}^3$ muni de produit scalaire $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \overline{\mathbf{v}}^{\mathsf{T}}\mathbf{u}$. Appliquons le procédé de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormée de $\mathrm{Vect}\left(\{\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}\}\right)$.

Notons que $\mathbf{u}^{(1)} = \frac{1}{\|\mathbf{v}^{(1)}\|}\mathbf{v}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\i\\0\end{bmatrix}$.

Ensuite, $\mathbf{r}^{(2)} = \mathbf{v}^{(2)} - \langle \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{u}^{(1)} \rangle \mathbf{u}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1-i \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1+i}{\sqrt{2}} \mathbf{u}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} \\ \frac{1-i}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$.

Puisque $\|\mathbf{r}^{(2)}\| = \sqrt{2}$, nous obtenons $\mathbf{u}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} \\ \frac{3-i}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Ainsi, $\left\{ \mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)} \right\}$ est une base orthonormée de $\mathrm{Vect}\left(\left\{ \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)} \right\} \right)$.

Exercices

1. Construisez une base orthornomée de $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel contenant le vecteur $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$.
2. Utilisez le procédé de Gram-Schmidt afin d'obtenir une base orthonormale de $\mathrm{Vect}\left(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)} \right)$, où $\mathbf{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, et $\mathbf{v}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solutions

1. $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}, \{ \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \right\}$.

2. Notons que $\mathbf{u}^{(1)} = \frac{1}{\|\mathbf{v}^{(1)}\|}\mathbf{v}^{(1)} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

   Alors,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{(2)} &= \mathbf{v}^{(2)} - (\mathbf{v}^{(2)} \cdot \mathbf{u}^{(1)})\mathbf{u}^{(1)} \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} - 3\mathbf{u}^{(1)} \\ &= \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

   d'où $\mathbf{u}^{(2)} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

   Finalement,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{(3)} &= \mathbf{v}^{(3)} - (\mathbf{v}^{(3)} \cdot \mathbf{u}^{(1)})\mathbf{u}^{(1)} - (\mathbf{v}^{(3)} \cdot \mathbf{u}^{(2)})\mathbf{u}^{(2)} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - 0\mathbf{u}^{(1)} - (-1)\mathbf{u}^{(2)} \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

   Notons que ce vecteur est déjà un vecteur unitaire. Donc, $\mathbf{u}^{(3)} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

10.3 Sous-espaces orthogonaux

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Rappelons que $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\}$

Soit $\mathbf{d} \in \mathrm{Lgn}(\mathbf{A})$ (l'espace vectoriel engendré par les colonnes de $\mathbf{A}^\mathsf{T}$). Alors il existe $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ tel que $\mathbf{d} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u}$, et

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{d} &= \mathbf{x}^\mathsf{T}\left(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u}\right)\\ &= \left(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)\mathbf{u}\\ &= (\mathbf{Ax})^\mathsf{T}\,\mathbf{u}\\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, \mathbf{d}\cdot\mathbf{x} = 0 \quad \forall\, \mathbf{d} \in \mathrm{Lgn}(\mathbf{A}).\}$$

Autrement dit, $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ consiste précisément de tous les vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de $\mathrm{Lgn}(\mathbf{A})$. Ceci nous amène à définir les sous-espace orthogonaux et le complément orthogonal d'un sous-espace vectoriel.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire. Soient U et W des sous-espaces de V. On dit que U et W sont **orthogonaux**, ce que l'on dénote par $U \perp W$, si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0$ pour tout $\mathbf{x} \in U$ et tout $\mathbf{y} \in W$.

Le complément orthogonal de U, que l'on dénote par $U^\perp$, est défini par

$$\{\mathbf{x} \in V \,:\, \langle \mathbf{x}, \mathbf{d}\rangle = 0 \quad \forall\, \mathbf{d} \in U\}\,.$$

Le résultat suivant est immédiat.

Proposition 10.1. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire. Soient U et W des sous-espaces de V. Alors, $U^\perp$ est un sous-espace de V et $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ si $U \perp W$.*

On peut voir que $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \mathrm{Lgn}(\mathbf{A})^\perp$. Mais est-il vrai que $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})^\perp = \mathrm{Lgn}(\mathbf{A})$? Ce résultat sera démontré dans la prochaine section.

Un important résultat de la théorie des matrices est le théorème 6.3 :

$$\dim(\mathrm{Lgn}(\mathbf{A})) + \dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{A})) = n,$$

pour tout $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

On peut généraliser ce résultat de la manière suivante :

Théorème 10.1. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire. Si W est un sous-espace de V, alors*

$$\dim(W) + \dim(W^{\perp}) = \dim(V).$$

Un résultat plus fort sera d'abord démontré dans la section prochaine.

Exercices

1. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Exprimez $\mathbf{u}$ sous la forme $\mathbf{y} + \mathbf{z}$, où $\mathbf{y} \in \mathrm{Lgn}(\mathbf{A})$ et $\mathbf{z} \in \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$.
2. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Trouvez une base orthonormée du complément orthogonal de $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$, où le produit scalaire est le produit scalaire usuel.
3. Démontrez la proposition 10.1.

Solutions

1. La forme échelonnée réduite de $\mathbf{A}$ est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Donc, $\mathrm{Ker}(A)$ est engendré par $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   Si l'énoncé de la question tient, on peut exprimer $\mathbf{u}$ en tant que combinaison linéaire des colonnes de $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ et de $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ en trouvant la solution de

   $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

   qui est donnée par $\lambda_1 = \frac{2}{3}$, $\lambda_2 = \frac{13}{6}$, et $\lambda_3 = \frac{7}{6}$.

   En posant $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{13}{6} \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}$ et $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{7}{6} \\ \frac{7}{6} \end{bmatrix}$, nous obtenons $\mathbf{u} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, où $\mathbf{y} \in \mathrm{Lgn}(\mathbf{A})$ et $\mathbf{z} \in \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$.

   Remarque. Nous allons voir plus tard une méthode plus directe utilisant la projection orthogonale.

2. Le complément orthogonal de $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ est donné par $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$. La forme échelonnée réduite de $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ est

   $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

   Ainsi, $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ engendre $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$. La norme de $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ est $\sqrt{35}$, d'où $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{35}} \\ \frac{3}{\sqrt{35}} \\ \frac{1}{\sqrt{35}} \end{bmatrix} \right\}$ est une base orthogonale du complément orthogonal de $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$.

3. Puisque $U \perp W$, nous avons $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ pour tout $\mathbf{x} \in U$ et $\mathbf{y} \in W$. Si $\mathbf{z} \in U \cap W$, alors $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = 0$, ce qui implique $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ par définition du produit scalaire.

   Montrons maintenant que $U^\perp$ est un sous-espace de V.

   Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U^\perp$ et λ un scalaire. Alors,

   $$\begin{aligned} \langle \lambda\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{d} \rangle &= \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{d} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{d} \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

pour chaque $\mathbf{d} \in U$, d'où $\lambda\mathbf{x}+\mathbf{y} \in U^{\perp}$, ce qui implique que $U^{\perp}$ est un sous-espace de V.

10.4 Somme directe

Si U et W sont des sous-espaces d'un espace vectoriel V, alors on écrit $V = U \oplus W$ si et seulement si pour tout $\mathbf{x} \in V$, il existe deux vecteurs *uniques* $\mathbf{y} \in U$ et $\mathbf{z} \in W$ tels que $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, On dit que V est une **somme directe** de U et W.

Lemme 10.1. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire. Soient U et W des sous-espaces de V tels que $V = U \oplus W$. Si $\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)}$ sont linéairement indépendants dans U et si $\mathbf{w}^{(1)}, \ldots, \mathbf{w}^{(m)}$ sont linéairement indépendants dans W, alors $\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{w}^{(1)}, \ldots, \mathbf{w}^{(m)}$ sont linéairement indépendants dans V.*

Démonstration. Par contradiction, supposons que $\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{w}^{(1)}, \ldots, \mathbf{w}^{(m)}$ ne soient pas linéairement indépendants dans V. Alors, on peut trouver des scalaraires $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_m$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{u}^{(i)} + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \mathbf{w}^{(i)} = \mathbf{0}.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que ce ne sont pas les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ qui sont nuls. Soit $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{u}^{(i)}$. Puisque $\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)}\}$ est linéairement indépendant, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. De plus, $\mathbf{u} \in U$.

Mais $\mathbf{u} = -\sum_{i=1}^{m} \gamma_i \mathbf{w}^{(i)}$, d'où $\mathbf{u} \in W$, ce qui implique que $\mathbf{u} \in U \cap W$. Mais $U \cap W = \mathbf{0}$ d'après la proposition 10.1, d'où $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, ce qui est une contradiction. □

Le résultat suivant suit immédiatement de ce lemme.

Théorème 10.2. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire. Soient U et W deux sous-espaces de V tel que $V = U \oplus W$. Alors*

$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(V)$$

Le théorème 10.1 découle alors du théorème 10.2 et du suivant.

Théorème 10.3. *Soit V un espace vectoriel de dimension finit muni d'un produit scalaire. Soit W un sous-espace de V. Alors*

$$V = W \oplus W^{\perp}.$$

Démonstration. Soit $\left\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)}\right\}$ une base de W. D'après le corollaire 6.3, on peut obtenir $\mathbf{u}^{(k+1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(n)} \in V$ tels que $\left\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)}\right\}$ est une base de V.

En appliquant le procédé de Gram-Schmidt à $\left\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(n)}\right\}$, on obtient une base orthonormée $\left\{\mathbf{q}^{(1)}, \ldots, \mathbf{q}^{(n)}\right\}$ de V telle que $\mathrm{Vect}\left(\mathbf{q}^{(1)}, \ldots, \mathbf{q}^{(i)}\right) = \mathrm{Vect}\left(\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(i)}\right)$ pour chaque $i = 1, \ldots, n$.

Entre autre, $\left\{\mathbf{q}^{(1)}, \ldots, \mathbf{q}^{(k)}\right\}$ est une base orthonormée de W.

Pour compléter la preuve, il suffit de montrer que $\left\{\mathbf{q}^{(k+1)}, \ldots, \mathbf{q}^{(n)}\right\}$ est une base de $W^\perp$.

Par construction, $\mathbf{q}^{(i)} \in W^\perp$ pour $i = k+1, \ldots, n$. Il ne reste donc à démontrer que $\mathrm{Vect}\left(\mathbf{q}^{(k+1)}, \ldots, \mathbf{q}^{(n)}\right) = W^\perp$, puisque que $\left\{\mathbf{q}^{(k+1)}, \ldots, \mathbf{q}^{(n)}\right\}$ est déjà linéairement indépendant.

Soit $\mathbf{z} \in W^\perp$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires tels que

$$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{q}^{(i)}.$$

Puisque $\mathbf{z} \in W^\perp$, on doit avoir $\langle \mathbf{z}, \mathbf{q}^{(i)} \rangle = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, k$. Ceci implique que $\lambda_1, \ldots, \lambda_k = 0$. Ainsi, $\mathbf{z} \in \mathrm{Vect}\left(\left\{\mathbf{q}^{(k+1)}, \ldots, \mathbf{q}^{(n)}\right\}\right)$. □

Corollaire 10.1. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire. Soit W un sous-espace de V. Alors*

$$(W^\perp)^\perp = W.$$

Démonstration. Soit $\mathbf{u} \in W$. Pour tout pour tout $\mathbf{v} \in W^\perp$, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ et il s'ensuit que $W \subseteq (W^\perp)^\perp$. D'après le théorème 10.1, nous avons

$$\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V)$$

et

$$\dim(W^\perp) + \dim((W^\perp)^\perp) = \dim(V),$$

puisque $W^\perp$ est un sous-espace de V (proposition 10.1). Ainsi, $\dim(W) = \dim((W^\perp)^\perp)$. Puisque W est un sous-espace de $(W^\perp)^\perp$ et que $\dim(W) = \dim((W^\perp)^\perp)$, il s'ensuit que $W = (W^\perp)^\perp$ d'après le théorème 6.2. □

Exercices

1. Soit V le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$. Trouvez des vecteurs $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^4$ tels que $\mathbb{R}^4 = V \oplus U$, où $U = \mathrm{Vect}\left(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}\right)$.
2. Démontrez le théorème 10.2 et du suivant.

Solutions

1. D'après le théorème 10.3, il suffit d'obtenir une base du noyau de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Notons que la forme échelonnée réduite de cette matrice est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

d'où

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

est une base du noyau.

2. Soient $\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)}\}$ une base de U et $\{\mathbf{w}^{(1)}, \ldots, \mathbf{w}^{(m)}\}$ une base de W. D'après le lemme 10.1, $\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{w}^{(1)}, \ldots, \mathbf{w}^{(m)}\}$ est linéairement indépendant. Puisque $V = U \oplus W$, pour tout $\mathbf{x} \in V$, il existe $\mathbf{y} \in U$ et $\mathbf{z} \in W$ tels que $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, d'où $V = \mathrm{Vect}\left(\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{w}^{(1)}, \ldots, \mathbf{w}^{(m)}\}\right)$. Ainsi, $\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{w}^{(1)}, \ldots, \mathbf{w}^{(m)}\}$ est une base de V, ce qui implique que $\dim(V) = k + m = \dim(U) + \dim(W)$.

10.5 Projection orthogonale

Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et W un sous-espace de V. Le théorème 10.3 indique que pour chaque $\mathbf{x} \in V$, il existe deux vecteurs uniques $\mathbf{y} \in W$ et $\mathbf{z} \in W^\perp$ tels que $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$. Le vecteur $\mathbf{y}$ est appelé **la projection orthogonale de $\mathbf{x}$ dans** W et est dénotée par $\text{proj}_W \mathbf{x}$.

Théorème 10.4. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire et W un sous-espace de V de dimension k. Si $\left\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)}\right\}$ est une base orthonormée de W, alors*

$$\text{proj}_W \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}^{(i)} \rangle \mathbf{u}^{(i)}$$

pour tout $\mathbf{x} \in V$.

Démonstration. On commence par construire $\mathbf{u}^{(k+1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(n)}$ tels que $\left\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)}\right\}$ est une base orthonormée de V. Notons que $\left\{\mathbf{u}^{(k+1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(n)}\right\}$ est une base de $W^\perp$ dans ce cas.

Puisque $\mathbf{x} \in V$, il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{u}^{(1)} + \cdots + \lambda_n \mathbf{u}^{(n)}$. Ainsi, $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, où $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{u}^{(i)} \in W$ et $\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i \mathbf{u}^{(i)} \in W^\perp$. Il vient

$$\text{proj}_W \mathbf{x} = \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{u}^{(i)}.$$

Pour chaque $i = 1, \ldots, k$, on constate que

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{y}, \mathbf{u}^{(i)} \rangle &= \langle \lambda_1 \mathbf{u}^{(1)} + \cdots + \lambda_k \mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{u}^{(i)} \rangle \\
&= \lambda_1 \langle \mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(i)} \rangle + \cdots + \lambda_k \langle \mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{u}^{(i)} \rangle \\
&= \lambda_i \langle \mathbf{u}^{(i)}, \mathbf{u}^{(i)} \rangle \\
&= \lambda_i \|\mathbf{u}^{(i)}\|^2 \\
&= \lambda_i,
\end{aligned}$$

tel que désiré. □

Corollaire 10.2. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire et W un sous-espace de V de dimension k. Si $\left\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)}\right\}$ est une base orthogonale de W, alors*

$$\text{proj}_W \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}^{(i)} \rangle}{\langle \mathbf{u}^{(i)}, \mathbf{u}^{(i)} \rangle} \mathbf{u}^{(i)}$$

pour tout $\mathbf{x} \in V$,

Exemple 10.5. Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soit $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Déterminons la projection orthogonale de $\mathbf{x}$ dans $W = \operatorname{Vect}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, où $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

On observe que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ est une base orthogonale de W. Ainsi,

$$\begin{aligned} \operatorname{proj}_W \mathbf{x} &= \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \mathbf{u} + \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{-2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{7}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exercices

1. Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard. Soit $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   Trouvez la projection orthogonale de $\mathbf{x}$ dans $\operatorname{Vect}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, où $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2. Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Soit W un sous-espace de V ayant une base orthonormée donnée par $\left\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)}\right\}$. Démontrez que

   $$\operatorname{proj}_W(\operatorname{proj}_W \mathbf{x}) = \operatorname{proj}_W \mathbf{x}$$

   pour tout $\mathbf{x} \in V$.

Solutions

1. Soit $W = \text{Vect}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Observons que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ est une base orthogonale de W. Donc,

$$\begin{aligned}\text{proj}_W \mathbf{x} &= \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}\mathbf{u} + \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}\mathbf{v} \\ &= \frac{3}{6}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{0}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

2. Soit $\mathbf{y} = \text{proj}_W \mathbf{x}$. D'après le théorème 10.4, nous avons

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{k} \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}^{(i)} \rangle \mathbf{u}^{(i)}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\text{proj}_W \mathbf{y} &= \sum_{i=1}^{k} \langle \mathbf{y}, \mathbf{u}^{(i)} \rangle \mathbf{u}^{(i)} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \langle \sum_{j=1}^{k} \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}^{(j)} \rangle \mathbf{u}^{(j)}, \mathbf{u}^{(i)} \rangle \mathbf{u}^{(i)} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{k} \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}^{(j)} \rangle \langle \mathbf{u}^{(j)}, \mathbf{u}^{(i)} \rangle \right) \mathbf{u}^{(i)} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}^{(i)} \rangle \mathbf{u}^{(i)} \\ &= \mathbf{y},\end{aligned}$$

tel que désiré.

10.6 Décomposition QR

Soit une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de rang n. (Alors $m \geq n$.) En utilisant le procédé de Gram-Schmidt avec le produit scalaire usuel, nous obtenons une base orthonormée $\{\mathbf{q}^{(1)}, \ldots, \mathbf{q}^{(n)}\}$ de $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$. Cette base est telle que $\mathrm{Vect}\left(\{\mathbf{q}^{(1)}, \ldots, \mathbf{q}^{(i)}\}\right) = \mathrm{Vect}\left(\{\mathbf{a}^{(1)}, \ldots, \mathbf{a}^{(i)}\}\right)$, pour chaque $i = 1, \ldots, n$, où $\mathbf{a}^{(i)}$ est la i-ième colonne de $\mathbf{A}$. Ainsi, pour chaque $i = 1, \ldots, n$, nous avons

$$\mathbf{a}^{(i)} = \langle \mathbf{a}^{(i)}, \mathbf{q}^{(1)}\rangle \mathbf{q}^{(1)} + \cdots + \langle \mathbf{a}^{(i)}, \mathbf{q}^{(i)}\rangle \mathbf{q}^{(i)}.$$

Soit $\mathbf{R}' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice dont les éléments (i, j) sont donnés par

$$r_{ij} = \begin{cases} \langle \mathbf{a}^{(j)}, \mathbf{q}^{(i)}\rangle & \text{si } i \leq j, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Notons que $\mathbf{R}'$ est une matrice triangulaire supérieure, et que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}^{(1)} & \ldots & \mathbf{q}^{(n)} \end{bmatrix} \mathbf{R}' = \mathbf{A}.$$

On construit $\mathbf{q}^{(n+1)}, \ldots, \mathbf{q}^{(m)}$ tels que $\{\mathbf{q}^{(1)}, \ldots, \mathbf{q}^{(n)}\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^m$. Soit $\mathbf{Q}$ la matrice carrée $\begin{bmatrix} \mathbf{q}^{(1)} & \ldots & \mathbf{q}^{(m)} \end{bmatrix}$. Alors

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR},$$

où $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}' \\ \mathbf{0}_{(m-n)\times n} \end{bmatrix}$. Ce produit est une **décomposition QR de $\mathbf{A}$.**

Exemple 10.6. Calculons une décomposition QR de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 1 \\ -2 & 7 & -1 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

En appliquant le procédé de Gram-Schmidt aux colonnes de la matrice $\mathbf{A}$, on obtient la matrice orthogonale

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

d'où

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

et $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$.

En général, on peut décomposer chaque matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ à l'aide d'un produit matriciel $\mathbf{QR}$, où $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ est orthogonale et $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ est triangulaire supérieure. Notons qu'une telle décomposition existe sans restriction sur la dimension ou le rang de $\mathbf{A}$. Nous laissons la démonstration de ce résultat en exercice. Considérons tout de même l'exemple suivant.

Exemple 10.7. Obtenons une décomposition QR pour $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$. Notons que $\mathbf{A}$ n'a pas de plein rang puisque sa forme échelonnée réduite est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. On en déduit que la première, la deuxième et la quatrième colonne de $\mathbf{A}$ sont linéairement indépendantes. De plus, la troisième colonne de $\mathbf{A}$ est une combinaison linéaire des deux premières colonnes : $\mathbf{A}_3 = -\mathbf{A}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{A}_2$.

En appliquant le procédé de Gram-Schmidt à $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, et $\mathbf{A}_4$, on obtient $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, et $\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. On obtient une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ en ajoutant $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$ à ces vecteurs.

Ainsi,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_3 &= -\mathbf{A}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{A}_2. \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ce qui donne une décomposition QR de $\mathbf{A}$.

Remarque. Même si, en théorie, la décomposition QR peut être obtenue en utilisant le procédé de Gram-Schmidt, les calculs numériques qui sous-tendent une telle décomposition sont assez compliqués. Pour plus d'informations, consulter Golub & Van Loan (1996).

Exercices

1. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Obtenez une décomposition QR de $\mathbf{A}$.
2. Démontrez que chaque matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, peut être décomposée selon le produit matriciel $\mathbf{QR}$, où $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est une matrice orthogonale et $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est une matrice triangulaire supérieure.

Solutions

1. En appliquant le procédé de Gram-Schmidt aux colonnes de $\mathbf{A}$, nous obtenons la matrice orthogonale
$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$
En prenant
$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$
on obtient $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, une décomposition QR de $\mathbf{A}$.
2. Indice : Appliquez le procédé de Gram-Schmidt aux colonnes de $\mathbf{A}$ qui correspondent aux pivots de la forme échelonnée réduite de $\mathbf{A}$. Notez que les colonnes libres peuvent être exprimées par une combinaison linéaire des colonnes précédentes.

10.7 Diagonalisation en base orthonormée

Une matrice carrée $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est dite **diagonalisable en base orthonormée** s'il existe une matrice orthogonale $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et une matrice diagonale $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telles que $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^\mathsf{T}$. Ce genre de diagonalisation est utilisée dans plusieurs analyses statistiques.

Une matrice diagonalisable en base orthonormée est nécessairement une matrice symétrique. En effet,

$$(\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^\mathsf{T})^\mathsf{T} = (\mathbf{U}^\mathsf{T})^\mathsf{T}\mathbf{D}^\mathsf{T}\mathbf{U}^\mathsf{T} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^\mathsf{T}$$

puisque les matrices diagonales sont invariantes sous la transposée.

Ce qui est vraiment incroyable est que l'inverse est aussi vrai : toute matrice symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormée. Ce résultat peut être démontré par induction sur l'ordre des matrices.

Théorème 10.5 (Théorème des axes principaux)**.** *Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, où n est un entier positif. Alors il existe $\mathbf{U}, \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{U}$ orthogonale et $\mathbf{D}$ diagonale, telles que $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^\mathsf{T}$.*

Démonstration. Si $n = 1$, on fixe simplement $\mathbf{U} = [1]$ et $\mathbf{D} = \mathbf{A}$.

Pour l'hypothèse d'induction, supposons que $n > 1$ et que chaque matrice symétrique de $\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ soit diagonalisable en base orthonormée.

Soient $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique et λ une valeur propre de $\mathbf{A}$. D'après le corollaire 7.1, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi, il exist un vecteur propre $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ associé à λ.

Posons $\mathbf{q}^{(1)} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$ et construisons en une base orthonormée $\{\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)}, \ldots, \mathbf{q}^{(n)}\}$ de $\mathbb{R}^n$. Si $\mathbf{Q}$ est la matrice $\begin{bmatrix}\mathbf{q}^{(1)} & \cdots & \mathbf{q}^{(n)}\end{bmatrix}$, alors

$$\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix}\lambda\mathbf{q}^{(1)} & \mathbf{p}^{(2)} & \cdots & \mathbf{p}^{(n)}\end{bmatrix},$$

où $\mathbf{p}^{(i)} = \mathbf{A}\mathbf{q}^{(i)}$ pour chaque $i = 2, \ldots, n-1$. Puisque $\mathrm{Vect}\left(\{\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)}, \ldots, \mathbf{q}^{(n)}\}\right) = \mathbb{R}^n$, il existe $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times(n-1)}$ telle que

$$\begin{bmatrix}\mathbf{p}^{(2)} & \cdots & \mathbf{p}^{(n)}\end{bmatrix} = \mathbf{Q}\mathbf{C}.$$

Ainsi,

$$\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\begin{bmatrix}\lambda & \mathbf{d} \\ 0 & \mathbf{A}'\end{bmatrix}$$

pour $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{1\times(n-1)}$ et $\mathbf{A}' \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ tels que $\mathbf{C} = \begin{bmatrix}\mathbf{d} \\ \mathbf{A}'\end{bmatrix}$.

Puisque $\mathbf{Q}$ est orthonormée par construction, nous obtenons

$$\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q}\begin{bmatrix}\lambda & \mathbf{d}\\ 0 & \mathbf{A}'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda & \mathbf{d}\\ 0 & \mathbf{A}'\end{bmatrix}.$$

En prenant la transposée de chaque côté, nous obtenons

$$\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix}\lambda & 0\\ \mathbf{d}^\mathsf{T} & \mathbf{A}'^\mathsf{T}\end{bmatrix}.$$

Mais $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\mathsf{T}$, d'où $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q}$. On en conclut que $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{A}' = \mathbf{A}'^\mathsf{T}$. D'après l'hypothèse d'induction, il existe $\mathbf{Q}', \mathbf{D}' \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$, $\mathbf{Q}'$ orthogonale et $\mathbf{D}'$ diagonale, telles que $\mathbf{A}' = \mathbf{Q}'\mathbf{D}'\mathbf{Q}'T$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q} &= \begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mathbf{Q}'\mathbf{D}'\mathbf{Q}'^\mathsf{T}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathbf{Q}'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mathbf{D}'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathbf{Q}'^\mathsf{T}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathbf{Q}'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mathbf{D}'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathbf{Q}'\end{bmatrix}^\mathsf{T}.\end{aligned}$$

Il s'ensuit alors que

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathbf{Q}'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mathbf{D}'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathbf{Q}'\end{bmatrix}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T}.$$

En posant $\mathbf{U} = \mathbf{Q}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathbf{Q}'\end{bmatrix}$ et $\mathbf{D} = \begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mathbf{D}'\end{bmatrix}$, nous obtenons $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^\mathsf{T}$. Il ne reste plus qu'à démontrer que $\mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{U} = \mathbf{I}$. C'est effectivement le cas puisque

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{U} &= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathbf{Q}'\end{bmatrix}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathbf{Q}'\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathbf{Q}'\end{bmatrix}^\mathsf{T}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathbf{Q}'\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathbf{Q}'T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathbf{Q}'\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathbf{Q}'T\mathbf{Q}'\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathbf{I}_{n-1}\end{bmatrix} = \mathbf{I}_n.\end{aligned}$$

□

La démonstration du théorème 10.5 suggère un algorithme permettant d'obtenir une diagonalisation en base orthonormée de matrices symétriques réelles. Cependant, le procédé s'avère extrêmement inefficace. Nous allons présenter une méthode bien plus pratique. Nous avons auparavant besoin d'un résultat intermédiaire très important.

Proposition 10.2. *Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, où n est un entier positif. Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs propres de $\mathbf{A}$ associés aux valeurs propres λ et γ, respectivement. Si $\mathbf{A}$ est symétrique et $\lambda \neq \gamma$, alors $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont orthogonaux.*

Démonstration. Notons que

$$\begin{aligned}(\lambda-\gamma)\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= (\lambda-\gamma)\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v}\\ &= \lambda\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v} - \gamma\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v}\\ &= (\lambda\mathbf{u})^\mathsf{T}\mathbf{v} - \gamma\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v}\\ &= (\mathbf{A}\mathbf{u})^\mathsf{T}\mathbf{v} - \gamma\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v}\\ &= \mathbf{u}^\mathsf{T}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{v}) - \gamma\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v}\\ &= \mathbf{u}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{v}) - \gamma\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v}\\ &= \mathbf{u}^\mathsf{T}(\gamma\mathbf{v}) - \gamma\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v}\\ &= \gamma\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v} - \gamma\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v} = 0.\end{aligned}$$

Puisque $\lambda \neq \gamma$, ceci implique que $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$. □

Ainsi, il est possible d'obtenir une base orthonormée de l'espace propre associé à chaque valeur propre d'une matrice carrée. Il suffit simplement de combiner tous ces vecteurs pour former la matrice orthogonale $\mathbf{U}$.

Exemple 10.8. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0\\ -6 & 0 & 6\\ 0 & 6 & -3\end{bmatrix}$. Montrons tout d'abord que $\mathbf{A}$ est diagonalisable en base orthonormée en présentant une matrice orthogonale $\mathbf{U}$ et une matrice diagonalisable $\mathbf{D}$ telles que $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^\mathsf{T}$.

Le polynôme charactéristique de $\mathbf{A}$ est

$$\begin{aligned}\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 & 0\\ -6 & -\lambda & 6\\ 0 & 6 & -3-\lambda\end{vmatrix}\\ &= -\lambda^3 + 81\lambda = -\lambda(\lambda-9)(\lambda+9).\end{aligned}$$

Les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont donc 0, 9, et -9.

La forme échelonnée réduite de $\mathbf{A} - 0\mathbf{I}$ est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, d'où $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ est engendré par le vecteur $\mathbf{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$. Mais $\mathbf{v}^{(1)}$ n'est pas unitaire (en effet, $\mathbf{v}^{(1)} \cdot \mathbf{v}^{(1)} = \frac{9}{4}$). Posons

$$\mathbf{u}^{(1)} = \frac{1}{\|\mathbf{v}^{(1)}\|}\mathbf{v}^{(1)} = \frac{2}{3}\mathbf{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

La forme échelonnée réduite de $\mathbf{A} - 9\mathbf{I}$ est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, d'où $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - 9\mathbf{I})$ est engendré par le vecteur $\mathbf{v}^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Mais $\mathbf{v}^{(2)}$ n'est pas unitaire (en effet, $\mathbf{v}^{(2)} \cdot \mathbf{v}^{(2)} = 9$). Posons

$$\mathbf{u}^{(2)} = \frac{1}{\|\mathbf{v}^{(2)}\|}\mathbf{v}^{(2)} = \frac{1}{3}\mathbf{v}^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Finalement, la forme échelonnée réduite de $\mathbf{A} - (-9)\mathbf{I}$ est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, d'où $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - (-9)I)$ est engendré par $\mathbf{v}^{(3)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Mais $\mathbf{v}^{(2)}$ n'est pas unitaire (en effet, $\mathbf{v}^{(3)} \cdot \mathbf{v}^{(3)} = \frac{9}{4}$). Posons

$$\mathbf{u}^{(3)} = \frac{1}{\|\mathbf{v}^{(3)}\|}\mathbf{v}^{(3)} = \frac{2}{3}\mathbf{v}^{(3)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Ainsi, en prenant $\mathbf{U} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$, nous obtenons $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^{\mathsf{T}}$.

Exercices

1. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

   a. Déterminez les valeurs propres de $\mathbf{A}$.

   b. Trouvez une diagonalisation en base orthonormée de $\mathbf{A}$.

Solutions

1. a. Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}} &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2 - 4 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda - 3 \\ &= (\lambda+1)(\lambda-3) \end{aligned}$$

et les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont -1 et 3.

b. La forme échelonnée réduite de $\mathbf{A} - (-1)\mathbf{I}$ est $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, d'où $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - (-1)\mathbf{I})$ est engendré par le vecteur $\mathbf{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Puisque $\mathbf{v}^{(1)} \cdot \mathbf{v}^{(1)} = 2$, on prend $\mathbf{u}^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

La forme échelonnée réduite de $\mathbf{A} - 3\mathbf{I}$ est $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, d'où $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})$ est engendré par le vecteur $\mathbf{v}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Puisque $\mathbf{v}^{(2)} \cdot \mathbf{v}^{(2)} = 2$, on prend $\mathbf{u}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

Ainsi, $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ et $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ forment la décomposition $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^{\mathsf{T}}$ recherchée.

10.8 Fonctions quadratiques

Dans cette section, nous étudions les fonctions quadratiques en utilisant la diagonalisation en base orthonormée.

10.8.1 Minimisation de fonction quadratique

Le problème visant à trouver une valeur réelle x minimisant une fonction quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a > 0$, est normalement étudié à l'école secondaire. On peut utiliser soit la méthode de complétion d'un carré ou le calcul différentiel afin de constater que la fonction atteint son minimum lorsque $x = -\frac{b}{2a}$.

Considérons maintenant un problème plus général. Pour $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$, déterminons la valeur minimale (si elle existe) de la forme quadratique définie par

$$P(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{x} + c.$$

Puisque $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{R}$, on doit avoir $(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x})^\mathsf{T} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$. Mais $(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x})^\mathsf{T} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{x}^\mathsf{T})^\mathsf{T} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{x}$, d'où

$$\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\left(\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\mathsf{T})\right)\mathbf{x},$$

ce qui revient à supposer, sans perte de généralité, que $\mathbf{A}$ est symétrique puisque $\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\mathsf{T})$ l'est.

D'après le théorème 10.5, il existe alors une matrice orthogonale $\mathbf{U}$ et une matrice diagonale $\mathbf{D}$ telles que $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^\mathsf{T}$. En prenant $\mathbf{y} = \mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{x}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{x} + c &= \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{U}\mathbf{y} + \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{U}\mathbf{y} + c\\ &= \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{D}\mathbf{y} + \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{U}\mathbf{y} + c\end{aligned}$$

La valeur minimum de P est donc égale à la valeur minimum de

$$\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{D}\mathbf{y} + \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{U}\mathbf{y} + c.$$

Mais $\mathbf{D}$ est une matrice diagonale (ce n'était pas nécessairement le cas pour $\mathbf{A}$) et nous pouvons compléter le carré tel qu'illustré dans l'exemple suivant.

Exemple 10.9. Nous voulons déterminer la valuer minimale de la form quadratique

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + x_1 - 2x_2,$$

si elle existe. Notons que

$$f(x_1, x_2) = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{x},$$

où $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Une diagonalisation en base orthonormée de $\mathbf{A}$ est donnée par $\mathbf{UDU}^\mathsf{T}$ où $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. Posons $\mathbf{y} = \mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{x}$. On obtient alors la fonction quadratique

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{D}\mathbf{y} + \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{U}\mathbf{y} &= y_1^2 + 5y_2^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \\ &= \left(y_1 + \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 5\left(y_2 - \frac{1}{10\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{10\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= \left(y_1 + \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 5\left(y_2 - \frac{1}{10\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{23}{20}, \end{aligned}$$

dont la valeur minimale de $-\frac{23}{20}$ est atteinte lorsque $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{10\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. Il s'ensuit que $f(x_1, x_2)$ atteint sa valeur minimale de $-\frac{23}{20}$ lorsque

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{U}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{10\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{10} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

Remarque. La minimisation d'une fonction quadratique s'effectue facilement en utilisant le calcul de plusieurs variables. Cependant, la justification complète de la méthode requiert une étude théorique qui excède de loin l'approche algébrique illustrée ci-dessus.

10.8.2 Quotient de Rayleigh

On présente un dernier résultat au sujet des matrices symétriques réelles.

Théorème 10.6. *Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique et $\lambda_{\min}$ la valeur propre la plus petite de $\mathbf{A}$. (Notons que toutes les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont réels d'après le corollaire 7.1.) Alors,*

$$\min_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x}} = \lambda_{\min}.$$

Démonstration. D'après le théorème 10.5, $\mathbf{A} = \mathbf{QDQ}^\mathsf{T}$, où $\mathbf{Q}$ est orthogonale et $\mathbf{D}$ une matrice diagonale avec les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sur sa diagonale.

Alors,

$$\begin{aligned}\min_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x}} &= \min_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{(\mathbf{Q}\mathbf{x})^\mathsf{T}\mathbf{D}(\mathbf{Q}\mathbf{x})}{\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x}} \\ &= \min_{\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \frac{\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{D}\mathbf{y}}{(\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{y})^\mathsf{T}(\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{y})} \\ &= \min_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \frac{\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{D}\mathbf{y}}{\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{y}}\end{aligned}$$

puisque $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{I}$ et $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ si et seulement si $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

De plus,

$$\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{D}\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ii} y_i^2 \geq \lambda_{\min} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \lambda_{\min}\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{y}.$$

Ainsi,

$$\min_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x}} \geq \lambda_{\min}.$$

Notons que le minimum est atteint lorsque $\mathbf{x}$ est un vecteur propre associé à $\lambda_{\min}$. □

Dans la littérature de problèmes d'optimisation, il existe des algorithmes efficaces pour résoudre le problème d'optimisation $\min_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x}}$. (On peut consulter Bertsekas (2016) pour en apprendre plus.)

Remarque. Le théorème 10.6 peut aussi être utilisé afin de trouver toutes les valeurs propres de $\mathbf{A}$. Une fois $\lambda_{\min}$ trouvé, on obtient une vecteur propre associé $\mathbf{q}$. On complète $\{\mathbf{q}\}$ pour obtenir une base orthogonale, que l'on place dans $\mathbf{Q}$. Le produit $\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^\mathsf{T}$ est alors $\begin{bmatrix} \lambda_{\min} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}' \end{bmatrix}$, où $\mathbf{A}'$ est symétrique. (Consulter la preuve du théorème 10.5.) On trouve ensuite les valeurs propres de $\mathbf{A}'$, ainsi que des vecteurs propres associés. Cet algorithme n'est pas une méthode très pratique et peut donner lieu à des instabilités du point de vue numérique. Mais on mentionne afin de montrer que le calcul de toutes les valeurs propres d'une matrice symétrique n'est pas plus difficile que de trouver sa valeur propre la plus petite.

Exercices

1. Soient $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Montrez directement que que
$$\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\mathsf{T}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\mathsf{T})\mathbf{x}.$$
2. Montrez que
$$5x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1 + 3 \geq 0.$$

3. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique et $\lambda_{\min}$ la valeur propre la plus petite de $\mathbf{A}$. Démontrez que

$$\min_{\|\mathbf{x}\|=1} \mathbf{x}^{\mathsf{T}} \mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda_{\min}.$$

Solutions

1. Pour tout $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{Q}\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n q_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^n q_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n q_{nj}x_j \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(x_i \sum_{j=1}^n q_{ij}x_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij}x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^n q_{ii}x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n}^n (q_{ij}+q_{ji})x_i x_j.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n}^n (a_{ij}+a_{ji})x_i x_j$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathbf{x}^\mathsf{T}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^\mathsf{T})\mathbf{x} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n (a_{ii}+a_{ii})x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n}^n ((a_{ij}+a_{ji})+(a_{ji}+a_{ij}))x_i x_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n}^n (a_{ij}+a_{ji})x_i x_j,\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\mathsf{T}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^\mathsf{T})\mathbf{x}.$$

2. Notons que

$$\begin{aligned} & 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1 + 3 \\ = \; & \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 3 \\ = \; & \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \mathbf{U} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{U}^\mathsf{T} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 3,\end{aligned}$$

où $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$. En prenant $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, il s'ensuit

$$\begin{aligned} & 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1 + 3 \\ = \; & y_1^2 + 6y_2^2 - \frac{6}{\sqrt{5}}y_1 - \frac{12}{\sqrt{5}}y_2 + 3 \\ = \; & \left(y_1 - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 + 6\left(y_2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{9}{5} - \frac{6}{5} + 3 \\ = \; & \left(y_1 - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 + 6\left(y_2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

tel que désiré.

3. Soit $\mathbf{x}'$ un vecteur propre unitaire de $\mathbf{A}$ associé à la valeur propre $\lambda_{\min}$. Alors

$$\mathbf{x}'^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}' = \lambda_{\min}\mathbf{x}'^{\mathsf{T}}\mathbf{x}' = \lambda_{\min}.$$

Pour compléter la preuve, il suffit de montrer que $\mathbf{x}'^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}' \geq \lambda_{\min}$ si $\mathbf{x}'$ est un vecteur unitaire.

Mais c'est évidemment le cas puisque

$$\mathbf{x}'^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}'^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}'}{\mathbf{x}'^{\mathsf{T}}\mathbf{x}'} \geq \lambda_{\min}$$

pour un tel $\mathbf{x}$, d'après le théorème 10.6.

10.9 Exemple de test portant sur la matière de ce chapitre

1. Construisez une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ contenant $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.
2. Soit W le sous-espace de $\mathbb{C}^3$ engendré par $\left\{ \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix} \right\}$. Donnez une base orthonormée de W.
3. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Donnez une base orthonormée de $\mathrm{Col}(\mathbf{A})^{\perp}$.
4. La trace d'une matrice carrée $\mathbf{C}$, dénotée par $\mathrm{tr}(\mathbf{C})$, est la somme des éléments sur sa diagonale. Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{2\times 3}$ muni d'un produit scalaire donné par
$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \mathrm{tr}(\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}).$$
Soit W le sous-espace de $\mathbb{R}^{2\times 3}$ engendré par $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Donnez une base de $W^{\perp}$.
5. Considérez l'espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ muni du produit scalaire usuel et $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$. Déterminez la projection orthogonale de $\mathbf{x}$ dans $\mathrm{Vect}\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{bmatrix} \right\} \right)$.
6. Obtenez une décomposition QR de $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
7. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$ une matrice symétrique. Montrez qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{A} + \gamma \mathbf{I}_n$ est semi-définie positive.
8. La fonction quadratique $4x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x^2 - x_2$ définie sur les nombres réels a-t-elle une valeur minimale? Si c'est le cas, trouvez cette valeur.

Chapitre 11

Projection

Dans ce chapitre, nous allons voir qu'il existe une matrice $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ que l'on peut exprimer en terme d'une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, telle que pour tout $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, la projection orthogonale de $\mathbf{u}$ dans $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ est tout simplement donnée par $\mathbf{Pu}$. On utilise souvent une telle formule en statistique lorsque l'on discute de modèles linéaires. La maîtrise du matériel de ce chapitre permet de :

— Définir une matrice de projection.
— Définir un pseudo-inverse.
— Construire une matrice de projection.
— Dériver la formule de la matrice de projection pour la projection orthogonale dans l'espace des colonnes d'une matrice.

Les connaissances requises pour ce chapitre incluent l'algèbre matricielle, les espaces vectoriels, et l'orthogonalité.

11.1 Cas d'une matrice de plein rang

Dans cette section, nous développons une formule afin d'obtenir la projection orthogonale dans $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ si $\mathbf{A}$ est une matrice de plein rang. Le cas où $\mathbf{A}$ n'est pas nécessairement de plein rang sera discuté lorsque nous aurons discuté des pseudo-inverses.

Soient $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$. Rappelons qu'il existe $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ tels que $\mathbf{u} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, où $\mathbf{y}$ est la projection orthogonale de $\mathbf{u}$ dans $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ et $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

On voit que $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y}$. Puisque $\mathbf{y} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})$, il existe $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ de sorte que $\mathbf{y} = \mathbf{Aw}$. Il s'ensuit que

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Aw}.$$

Si $\mathbf{A}$ est de plein rang, on utilise le fait que $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ est inversible (démonstration laissée en exercice) afin d'obtenir que

$$\mathbf{w} = (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u}.$$

Ainsi,

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u}.$$

Posons

$$\mathbf{P}_\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}.$$

La projection orthogonale de tout $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ dans $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ est donc $\mathbf{P}_\mathbf{A}\mathbf{u}$. On appelle $\mathbf{P}_\mathbf{A}$ la **matrice de projection** associée à $\mathbf{A}$.

Exemple 11.1. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Notons que $\mathbf{A}$ est de plein rang, et que $\mathrm{Col}(\mathbf{A}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$. Alors,

$$\mathbf{P}_\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{13}{15} & \frac{1}{15} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{15} & \frac{29}{30} \end{bmatrix}.$$

Exercices

1. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice inversible. Déterminez $\mathbf{P}_\mathbf{A}$.
2. Démontrez que si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ est de plein rang, alors $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ est inversible.

Solutions

1. Notons que
$$\mathbf{P_A} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}^\mathsf{T})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{I}.$$

2. D'après la décomposition $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, où $\mathbf{Q}$ est orthogonale et $\mathbf{R}$ est de la forme $\begin{bmatrix}\mathbf{R}'\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$, où $\mathbf{R}' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice triangulaire supérieure, nous avons
$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = (\mathbf{QR})^\mathsf{T}(\mathbf{QR}) = \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{QR} = \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{R} = \mathbf{R}'^\mathsf{T}\mathbf{R}'.$$
Puisque $\mathbf{A}$ est de rang n, $\mathbf{R}'$ l'est également. Donc, $\mathbf{R}'$ est inversible, ce qui implique que $\mathbf{R}'^\mathsf{T}\mathbf{R}'$ est inversible. Ainsi, $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ est aussi inversible.

11.2 Pseudo-inverse

Dans la section précédente, nous avons vu que si la projection orthogonale de $\mathbf{u}$ dans $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ est donnée par $\mathbf{Aw}$ pour un quelconque $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{w}.$$

Si $\mathbf{A}$ est de plein rang, alors $\mathbf{w} = (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u}$. Sinon, $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ n'est pas inversible et il n'y a pas d'expression simple permettant le calcul de $\mathbf{w}$. Existe-t-il une notion plus générale de l'inverse d'une matrice que l'on pourrait utiliser?

Pour répondre à cette question, il est important de préciser ce que l'on entend par l'inverse d'une matrice. Considérons pour l'instant l'inverse d'une matrice inversible carré $\mathbf{A}$. On peut considérer $\mathbf{A}$ comme une fonction associant $\mathbf{y}$ à $\mathbf{x}$ via $\mathbf{Ax}$, tout comme $\mathbf{A}^{-1}$ est une fonction associant $\mathbf{y}$ à $\mathbf{x}$ via $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$.

Dans le cas général, où $\mathbf{A}$ n'est pas nécessairement inversible, il peut y avoir plusieurs $\mathbf{x}'$ tels que $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}'$. Dans le meilleur des cas, on peut espérer qu'il existe une matrice $\mathbf{G}$ associant $\mathbf{y}$ à un $\mathbf{x}'$ quelconque via $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}'$. Autrement dit, on cherche une matrice $\mathbf{Gy}$ telle que

$$\mathbf{AGy} = \mathbf{y},$$

ou, de façon équivalente,

$$\mathbf{AGAx} = \mathbf{y} = \mathbf{Ax}.$$

Comme le choix de $\mathbf{x}$ est arbitraire, on doit avoir

$$\mathbf{AGA} = \mathbf{A}.$$

Une telle matrice $\mathbf{G}$ porte le nom de **pseudo-inverse** de $\mathbf{A}$, dénoté par $\mathbf{A}^-$.

Une telle matrice existe toujours, mais elle n'est pas nécessairement unique. On donnera une construction dans un chapitre ultérieur.

Exemple 11.2. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Alors $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -1 \\ \frac{1}{5} & 2 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{G}' = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 1 \\ \frac{1}{5} & -2 \end{bmatrix}$ sont toutes deux des pseudo-inverses de $\mathbf{A}$.

En effet,

$$\begin{aligned} \mathbf{AGA} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -1 \\ \frac{1}{5} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbf{AG'A} &= \begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & 1\\ \frac{1}{5} & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \mathbf{A}\end{aligned}$$

Mentionnons ici que dans certaines applications, il est commun d'exiger que $\mathbf{G}$ satisfasse aux **conditions de Penrose** :

1. $\mathbf{AGA} = \mathbf{A}$
2. $\mathbf{GAG} = \mathbf{A}$
3. $(\mathbf{AG})^\mathsf{T} = \mathbf{AG}$
4. $(\mathbf{GA})^\mathsf{T} = \mathbf{GA}$

Dans ce cas, $\mathbf{G}$ est appelé le **pseudo-inverse de Moore-Penrose** et, contrairement à une matrice pseudo-inverse générique, est unique pour une matrice $\mathbf{A}$ donnée. On le dénote par $\mathbf{A}^+$.

11.2.1 Solutions de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

L'existence d'un pseudo-inverse a une conséquence importante pour les systèmes d'équations linéaires.

Théorème 11.1. *Soient $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $\mathbf{b} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})$. Alors $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ est une solution du système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ si et seulement si*

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^-\mathbf{b} + (\mathbf{I}_n - \mathbf{A}^-\mathbf{A})\mathbf{u}$$

pour un $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ particulier.

Autrement dit, le théorème 11.1 donne une formule qui permet d'obtenir toutes les solutions du système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Les détails de la démonstration sont laissés en exercice.

Exemple 11.3. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix}$. Nous avons vu à l'exemple 11.2 que $\mathbf{G} = \begin{bmatrix}\frac{2}{5} & -1\\ \frac{1}{5} & 2\end{bmatrix}$ est un pseudo-inverse de $\mathbf{A}$.

Ainsi, toutes les solutions de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ sont données par $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ pour tous $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$.

Remarque. Une discussion plus détaillée au sujet des pseudo-inverses et des systèmes d'équations linéaires se retrouve dans James (1978).

Exercices

1. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Vérifiez que $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix}$ est le pseudo-inverse de Moore-Penrose de $\mathbf{A}$.
2. Démontrez le théorème 11.1.

Solutions

1. Il suffit d'effectuer les calculs nécessaires pour vérifier les conditions :
   1. $\mathbf{AGA} = \mathbf{A}$
   2. $\mathbf{GAG} = \mathbf{A}$
   3. $(\mathbf{AG})^\mathsf{T} = \mathbf{AG}$
   4. $(\mathbf{GA})^\mathsf{T} = \mathbf{GA}$
2. On montre d'abord que $\mathbf{x} = \mathbf{A}^-\mathbf{b} + (\mathbf{I}_n - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{u}$ est une solution de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ pour tout $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. Puisque $\mathbf{b} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})$, il existe $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathbf{b} = \mathbf{Ay}$. Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. Alors,

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{A}(\mathbf{A}^-\mathbf{Ay} + (\mathbf{I} - \mathbf{A}^-\mathbf{A})\mathbf{u}) \\ &= \mathbf{AA}^-\mathbf{Ay} + \mathbf{Au} - \mathbf{AA}^-\mathbf{Au}) \\ &= \mathbf{Ay} + \mathbf{Au} - \mathbf{Au} \\ &= \mathbf{b}. \end{aligned}$$

   En particulier, notons que $\mathbf{x} = \mathbf{A}^-\mathbf{b}$ est une solution.

   Réciproquement, notons que puisque $\mathbf{x} = \mathbf{A}^-\mathbf{b}$ est une solution particulière de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, il suffit de démontrer que $\mathbf{y} \in \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ si et seulement si $\mathbf{y} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^-\mathbf{A})\mathbf{u}$ pour un $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ particulier.

   Si $\mathbf{y} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^-\mathbf{A})\mathbf{u}$, où $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\mathbf{Ay} = \mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{A}^-\mathbf{A})\mathbf{u} = \mathbf{Au} - \mathbf{AA}^-\mathbf{Au} = \mathbf{Au} - \mathbf{Au} = \mathbf{0}_m.$$

Si $\mathbf{y} \in \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$, alors $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{0}_m$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= \mathbf{I}_n\mathbf{y} - \mathbf{0}_n \\ &= \mathbf{I}_n\mathbf{y} - \mathbf{A}^-\mathbf{0}_m \\ &= \mathbf{I}_n\mathbf{y} - \mathbf{A}^-\mathbf{A}\mathbf{y} \\ &= (\mathbf{I}_n - \mathbf{A}^-\mathbf{A})\mathbf{y},\end{aligned}$$

ce qui implique que $\mathbf{y}$ est de la forme $(\mathbf{I}_n - \mathbf{A}^-\mathbf{A})\mathbf{u}$ pour un $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ particulier.

11.3 Cas général

Soient $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$. Nous avons vu précédemment que pour chaque $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A}\mathbf{w}$ est la projection orthogonale de $\mathbf{u}$ dans $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ si et seulement si

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{w}.$$

Nous avons déjà vu que la condition est nécessaire. Pour vérifier qu'elle est également suffisante, on suppose que $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{w}$. Soient $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{w}$ et $\mathbf{z} = \mathbf{u} - \mathbf{y}$. Alors, $\mathbf{u} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, et

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{z} &= \mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{u} - \mathbf{y}) \\ &= \mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{u} - \mathbf{A}\mathbf{w}) \\ &= \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} - \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{w} \\ &= \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} - \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \mathbf{0},\end{aligned}$$

d'où $\mathbf{z} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})^\perp$. Ainsi, $\mathbf{y}$ est la projection orthogonale de $\mathbf{u}$ dans $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$, tel que désiré.

Considérons à nouveau l'équation

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{w}.$$

D'après le théorème 11.1, $\mathbf{w} = (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^-\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u}$ est une solution du système. La projection orthogonale de $\mathbf{u}$ dans $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ est ainsi donnée par

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^-\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u}.$$

En posant

$$\mathbf{P}_\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^-\mathbf{A}^\mathsf{T},$$

la projection orthogonale de $\mathbf{u}$ dans $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ est $\mathbf{P_A u}$ pour tout $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$. La matrice $\mathbf{P_A}$ est la **matrice de projection** dans $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$.

Bien qu'il y ait plusieurs pseudo-inverses $(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^-$, la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^-\mathbf{A}^\mathsf{T}$ est unique, comme la proposition suivante le démontre :

Proposition 11.1. *Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Si $\mathbf{G}$ et $\mathbf{G}'$ sont des pseudo-inverses de $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$, alors*

$$\mathbf{AGA}^\mathsf{T} = \mathbf{AG}'\mathbf{A}^\mathsf{T}.$$

Démonstration. Pour chaque $i \in \{1, \ldots, m\}$, soit $\mathbf{e}^{(i)}$ la i-ième colonne de $\mathbf{I}_m$. La projection orthogonale de $\mathbf{e}^{(i)}$ dans $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ est donnée par $\mathbf{AGA}^\mathsf{T}\mathbf{e}^{(i)}$ et par $\mathbf{AG}'\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{e}^{(i)}$. Puisque ces vecteurs sont égaux, on doit avoir

$$\mathbf{AGA}^\mathsf{T}\mathbf{e}^{(i)} = \mathbf{AG}'\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{e}^{(i)}$$

pour tout $i = 1, \ldots, m$, d'où

$$\mathbf{AGA}^\mathsf{T}\mathbf{I}_m = \mathbf{AG}'\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{I}_m,$$

ce qui implique que

$$\mathbf{AGA}^\mathsf{T} = \mathbf{AG}'\mathbf{A}^\mathsf{T}.$$

□

Proposition 11.2. *Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Alors $\mathbf{P_A A} = \mathbf{A}$.*

Démonstration. Notons que pour tout $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{P_A u}$ est la projection orthogonale de $\mathbf{u}$ dans $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$. Ainsi, $\mathbf{P_A u} = \mathbf{x}$ pour tout $\mathbf{u} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, où $\mathbf{x} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})$ et $\mathbf{y} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})^\perp$. Si $\mathbf{u}$ est une colonne de $\mathbf{A}$, alors $\mathbf{P_A u} = \mathbf{u}$. il s'ensuit que $\mathbf{P_A A} = \mathbf{A}$. □

Exercices

1. Démontrez que si $\mathbf{P}$ est une matrice de projection, alors $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$. (Une matrice $\mathbf{A}$ telle que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ est dite **idempotente**.)
2. Soit $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice de projection.
   a. Démontrez que pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $(\mathbf{Pu}) \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{Pu}) \cdot (\mathbf{Pv}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{Pv})$.
   b. Démontrez que P est symétrique.
3. Soit $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Démontrez que si $\mathbf{P}$ est symétrique et idempotente, alors $\mathbf{P}$ est une matrice de projection.

Solutions

1. Soit $\mathbf{A}$ telle que $\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-}\mathbf{A}^\mathsf{T}$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^2 &= \mathbf{P}(\mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-}\mathbf{A}^\mathsf{T}) \\ &= (\mathbf{PA})(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-}\mathbf{A}^\mathsf{T} \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{P},\end{aligned}$$

   d'après la proposition 11.2.

2. Soit $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice de projection.

   a. Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Alors $\mathbf{u} = \mathbf{Pu} + \mathbf{x}$ pour un $\mathbf{x}$ tel que $(\mathbf{Pu}) \cdot \mathbf{x} = 0$ et $\mathbf{v} = \mathbf{Pv} + \mathbf{y}$ pour un $\mathbf{y}$ tel que $(\mathbf{Pu}) \cdot \mathbf{y} = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}(\mathbf{Pu}) \cdot \mathbf{v} &= (\mathbf{Pu}) \cdot (\mathbf{Pv} + \mathbf{y}) \\ &= (\mathbf{Pu}) \cdot (\mathbf{Pv}) + (\mathbf{Pu}) \cdot \mathbf{y} \\ &= (\mathbf{Pu}) \cdot (\mathbf{Pv})\end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{Pv}) &= (\mathbf{Pu} + \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{Pv}) \\ &= (\mathbf{Pu}) \cdot (\mathbf{Pv}) + \mathbf{x} \cdot (\mathbf{Pv}) \\ &= (\mathbf{Pu}) \cdot (\mathbf{Pv}) + (\mathbf{Pv}) \cdot \mathbf{x} \\ &= (\mathbf{Pu}) \cdot (\mathbf{Pv}).\end{aligned}$$

   Le résultat s'ensuit.

   b. Soit $\mathbf{e}^{(i)}$ la i-ième colonne de $\mathbf{I}_n$. Alors, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$(\mathbf{Pe}^{(i)}) \cdot \mathbf{e}^{(j)} = \mathbf{e}^{(i)} \cdot (\mathbf{Pe}^{(j)})$$

   d'après la partie a. Mais $(\mathbf{Pe}^{(i)}) \cdot \mathbf{e}^{(j)} = {\mathbf{e}^{(i)}}^\mathsf{T}\mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{e}^{(j)}$ représente l'élément (j, i) de $\mathbf{P}$ et $\mathbf{e}^{(i)} \cdot (\mathbf{Pe}^{(j)}) = {\mathbf{e}^{(i)}}^\mathsf{T}\mathbf{Pe}^{(j)}$ est l'élément (i, j) de $\mathbf{P}$, d'où $\mathbf{P}$ est symétrique.

3. Il suffit de démontrer qu'il existe une matrice $\mathbf{A}$ telle que pour tout $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{Pu} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})$ et $\mathbf{u} - \mathbf{Pu} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})^\perp$.

   Soient $\mathbf{A} = \mathbf{P}$ et $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. On voit immédiatement que $\mathbf{Pu} = \mathbf{Au} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})$.

   Notons que

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{u} - \mathbf{Pu}) &= \mathbf{P}^\mathsf{T}(\mathbf{u} - \mathbf{Pu}) \\ &= \mathbf{P}(\mathbf{u} - \mathbf{Pu}) \\ &= \mathbf{Pu} - \mathbf{P}^2\mathbf{u} \\ &= \mathbf{Pu} - \mathbf{Pu} = \mathbf{0},\end{aligned}$$

d'où $\mathbf{u} - \mathbf{P}\mathbf{u} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})^{\perp}$.

Remarque. Dans la littérature, une matrice de projection est parfois définie comme une matrice réelle, symétrique, et idempotente, sans référence à l'espace dans lequel les vecteurs sont projetés.

11.4 Exemple de test portant sur la matière de ce chapitre

1. Donnez une matrice $\mathbf{P}$ telle que pour tout $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{Pu}$ est la projection orthogonale de $\mathbf{u}$ dans l'espace engendré par des colonnes de $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
2. Donnez un pseudo-inverse de $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.
3. La **trace** d'une matrice carrée $\mathbf{C}$ est la somme des éléments sur sa diagonale.
   a. Montrez que si $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, alors $\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})$.
   b. Soit $\mathbf{P}$ une matrice de projection. Démontrez que le rang de $\mathbf{P}$ est égale à sa trace. (Indice : Les matrices de projections sont symétriques et idempotentes.)
4. Soit $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ une matrice de projection non nulle. Montrez que $\mathbf{P} = \mathbf{I}_2$ ou qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & 1-a \end{bmatrix},$$
où $|a| \leq 1$ et $b = \pm\sqrt{a - a^2}$.

Chapitre 12

Méthode des moindres carrés

Ce chapitre introduit la notion de « résolution » d'un système d'équations linéaire lorsqu'un système a aucune solution. Nous appelons ce procédé la méthode des moindres carrés. La maîtrise du matériel de ce chapitre permet de :

- Définir un système inconsistant.
- Introduire les solutions des moindres carrés d'un système inconsistant.
- Calculer les solutions des moindres carrés d'un système inconsistant de plusieurs manières.
- Démontrer que les solutions des moindres carrés sont des solutions de l'équation normale.
- Utiliser la méthode des moindres carrés pour trouver une courbe d'ajustement qui s'approche au mieux des données observées.

Les connaissances requises pour ce chapitre incluent l'algèbre des matrices, les produits scalaires, et les espaces vectoriels.

12.1 Résolution de système inconsistant

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Il se peut qu'il n'y ait aucun $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant à $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Dans un tel cas, on dit que le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ est **inconsistant**. Un système qui n'est pas inconsistant est appelé un système **consistant**.

Exemple 12.1. Le système suivant est inconsistant :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ -x_1 + x_2 &= 2 \\ x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Pour vérifier ce résultat, on note que l'addition des deux premières équations donne $2x_2 = 3$ tandis que la troisième équation requiert $x_2 = 0$. Ces deux énoncés sont incompatibles.

Il est naturel de s'attendre à ce que l'étude des systèmes inconsistants ne soit pas très intéressante. Mais il demeure tout de même important de trouver des solutions approximatives dans plusieurs applications. Par exemple, les éléments du vecteur $\mathbf{b}$ peuvent provenir de certaines mesures prisent avec des instruments imprécis.

Une façon d'approcher la problème est d'obtenir un $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ de sorte que $\mathbf{Ax}$ soit le plus près possible du vecteur $\mathbf{b}$. Lorsque le système est consistant, cette approche donne une solution exacte de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Dans ce chapitre, nous mettons l'accent sur la résolution du problème qui consiste à trouver $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que la distance entre $\mathbf{Ax}$ et $\mathbf{b}$ est minimisée. Avant d'entreprendre les éléments principaux de notre discussion, nous allons établir une notation pour la distance entre deux éléments de $\mathbb{R}^n$.

Une notion immédiatement disponible est celle de la longueur d'un vecteur : $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$ pour tout $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. On définit la distance entre $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ par $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.

Exemple 12.2. Soient $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Alors

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = 5.$$

La longueur d'un vecteur définie à l'aide du produit scalaire est loin d'être la seule mesure de la distance entre deux vecteurs. En fait, chaque produit scalaire définit dans $\mathbb{R}^n$ induit une fonction distance qui pourrait être utilisée. Dans la pratique, le choix fait ci-dessus est suffisant et possède des propriétés très séduisantes pouvant être exprimées de façon symbolique.

Tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ minimisant la quantité $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$ est une **solution des moindres carrés** du système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Exercices

1. Déterminez la distance entre $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$.
2. Sans utiliser le calcul, déterminez un nombre réel x minimisant

$$(2x-1)^2 + (x-2)^2.$$

Solutions

1. 5.
2. Notons que

$$\begin{aligned}(2x-1)^2+(x-2)^2 &= 4x^2-4x+1+x^2-4x+4\\ &= 5x^2-8x+5\\ &= 5\left(x^2-\frac{8}{5}x\right)+5\\ &= 5\left(x-\frac{4}{5}\right)^2-\frac{16}{5}+5\end{aligned}$$

qui est minimisé lorsque $x=\frac{4}{5}$.

12.2 Cas à une seule variable

Considérons le scénario suivant : un professeur demande à quatre étudiantes de mesurer la hauteur du plafond de la salle de classe. Le tableau suivant indique les quatre mesures :

263.2 cm
263.4 cm
263.5 cm
263.8 cm

Quel est la véritable hauteur du plafond?

Si h dénote la véritable hauteur et si les mesures sont correctes, alors nous obtenons

$$\begin{aligned} h &= 263.2 \\ h &= 263.4 \\ h &= 263.5 \\ h &= 263.8, \end{aligned}$$

ce qui donne lieu à un système inconsistant.

Que se passe-t-il si nous cherchions plutôt une solution des moindres carrés?

On cherche alors la valeur pour h qui minimise $\|h\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$, où $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 263.2 \\ 263.4 \\ 263.5 \\ 263.8 \end{bmatrix}$.

Commençons par noter que minimiser $\|h\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ est équivalent à minimiser $\|h\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2$.

Puisque

$$\begin{aligned} \|h\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 &= (h - 263.2)^2 + (h - 263.4)^2 + (h - 263.5)^2 + (h - 263.8)^2 \\ &= 4h^2 - 2(263.2 + 263.4 + 263.5 + 263.8)h + (263.2^2 + 263.4^2 + 263.5^2 + 263.8^2) \end{aligned}$$

est une fonction quadratique par rapport à h, on trouve facilement qu'elle est minimisée à $h = \frac{263.2+263.4+263.5+263.8}{4}$. (Ceci peut être déduit en utilisant le calcul différentiel ou en complétant le carré.) Autrement dit, la meilleure approximation pour h est la moyenne de toutes les mesures.

Plus généralement, supposons que $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, où $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

Alors, pour $x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\begin{aligned}\|x\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 &= (x\mathbf{a} - \mathbf{b})^\mathsf{T}(x\mathbf{a} - \mathbf{b}) \\ &= (\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a})x^2 - 2(\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{b})x + \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{b} \\ &= \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}\left(x^2 - 2\left(\frac{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{b}}{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}}\right)x\right) + \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{b} \\ &= \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}\left(x - \frac{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{b}}{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}}\right)^2 - \frac{(\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{b})^2}{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}} + \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{b},\end{aligned}$$

qui atteint son minimum en $x = \frac{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{b}}{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}}$.

Dans le cas où tous les éléments de $\mathbf{a}$ sont 1, nous obtenons

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{m} b_i}{m},$$

qui est tout simplement la moyenne de éléments de $\mathbf{b}$. Ceci justifie l'utilisation à toutes les sauces de la moyenne lorsque l'on cherche à résumer un ensemble de mesures d'un phénomène, trait, objet, etc.

Exercices

1. Soient $\mathbf{a} = \begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$. Donnez une valeur $x \in \mathbb{R}$ qui minimise $\|x\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2$.
2. Déterminez tous les $x, y \in \mathbb{R}$ qui minimisent $(x + y - 2)^2 + (x + y + 1)^2$.

Solutions

1. $x = \frac{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{b}}{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}} = \frac{5}{14}$.
2. Notons que

$$\begin{aligned} & (x+y-2)^2 + (x+y+1)^2 \\ = \; & 2x^2 + 4xy + 2y^2 - 2x - 2y + 5 \\ = \; & 2(x^2 + 2xy + y^2 - x - y) + 5 \\ = \; & 2(x+y-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + 5, \end{aligned}$$

qui est minimisé pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ satisfaisant $x + y = \frac{1}{2}$.

12.3 Cas général

Soient $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Dans le cas général, il est plus difficile de trouver la solution des moindres carrés du système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Bien qu'il soit toujours possible de minimiser $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2$ en utilisant le calcul à plusieurs variables, nous allons suivre un chemin algébrique.

Rappelons que l'on cherche un vecteur dans $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ qui est le plus près de $\mathbf{b}$. En tenant compte de cela, on écrit $\mathbf{b} = \mathbf{u}+\mathbf{d}$, où $\mathbf{u} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})$ et $\mathbf{d} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})^\perp$. Cette décomposition est possible en raison du théorème 10.3 et le choix de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{d}$ est unique. En outre, $\mathbf{u}$ est la projection orthogonale de $\mathbf{b}$ dans $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$.

Soit $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathbf{u} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$. Alors,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2 &= \|\mathbf{Ax} - (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{d})\|^2\\ &= \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{d})\|^2\\ &= (\mathbf{A}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{d})^\mathsf{T}(\mathbf{A}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{d})\\ &= (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) - (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{d} - \mathbf{d}^\mathsf{T}\mathbf{A}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{d}^\mathsf{T}\mathbf{d}\end{aligned}$$

Mais $\mathbf{d}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{d} = \mathbf{0}$ puisque $\mathbf{d}$ est dans le complément orthogonal de $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2 &= \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})\|^2 + \|\mathbf{d}\|^2\\ &= \|\mathbf{Ax} - \mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{d}\|^2 \geq \|\mathbf{d}\|^2,\end{aligned}$$

avec égalité lorsque $\mathbf{Ax} = \mathbf{u}$.

On peut effectuer deux observations importantes suite à ce que nous venons d'obtenir.

1. La distance minimale entre $\mathbf{b}$ et tout autre vecteur de $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ est donnée par $\|\mathbf{d}\|$.
2. Toute solution de $\mathbf{Ax} = \mathbf{u}$ donne lieu à une solution des moindres carrés si $\mathbf{u}$ est la projection orthogonale de $\mathbf{b}$ dans $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$.

Exemple 12.3. Trouvez une solution des moindres carrés de

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 1\\ -x_1 + x_2 &= 2\\ x_2 &= 0.\end{aligned}$$

Notons que le système peut être réécrit comme sous la forme $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, où $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Obtenons maintenant la projection de $\mathbf{b}$ dans $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$. On nomme ce vecteur $\mathbf{u}$.

Puisque $\mathbf{A}$ est de plein rang, la matrice de projection peut être utilisée afin d'obtenir $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alternativement, on peut d'abord obtenir une base orthonormée $\{\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}\}$ de $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$. Ainsi, $\mathbf{u}$ est donné par

$$\left(\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}^{(1)}\right) \mathbf{u}^{(1)} + \left(\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}^{(2)}\right) \mathbf{u}^{(2)},$$

d'après le théorème 10.4.

Notons que les deux colonnes de $\mathbf{A}$ sont déjà orthogonales. On choisit $\mathbf{u}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{u}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, d'où $\mathbf{u} = \left(\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}^{(1)}\right) \mathbf{u}^{(1)} + \left(\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}^{(2)}\right) \mathbf{u}^{(2)} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{3}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$, ce qui correspond à la réponse obtenue précédemment en utilisant la matrice de projection.

Il suffit ensuite de résoudre le système $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{u}$, ce qu'on peut faire de la manière suivante

:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

On peut en conclure que la solution des moindres carrés du système original est donnée par

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice

1. Obtenez une solution des moindres carrés de

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 3 \\ -x_1 + 3x_2 &= 3 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Solution

1. Le système se réécrit sous la forme $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, où $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   Puisque $\mathbf{A}$ est de plein rang, la projection orthogonale de $\mathbf{b}$ dans $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \mathbf{P_A b} \\
&= \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

   On obtient une solution des moindres carrés en résolvant $\mathbf{Ax} = \mathbf{u}$, ici $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$.

   Remarque. Comme vous l'avez peut-être constaté lors la dérivation précédante, une solution des moindres carrés est donnée par $(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$. Nous allons étudier cette observation en détail dans la section suivante.

12.4 Équation normale

Soient $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. On obtient une solution des moindres carré de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ en trouvant $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathbf{b} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{d}$ pour un vecteur $\mathbf{d} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})^\perp$.

Ainsi, il est nécessaire que $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ satisfasse à

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b} = \mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{d}) = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{d}.$$

Puisque $\mathbf{d} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A})^\perp$, $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{d} = \mathbf{0}$, d'où

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}.$$

Autrement dit, $\hat{\mathbf{x}}$ doit être une solution de

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b},$$

que l'on nomme **l'équation normale** associée à $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

On montre maintenant que chaque solution de l'équation normale est une solution des moindres carrés de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Si $\hat{\mathbf{x}}$ satisfait à

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b},$$

alors $\mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$, ce qui implique que $\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} \in \mathrm{Col}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$. Posons $\mathbf{d} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$. Alors $\mathbf{b} = \mathbf{u} + \mathbf{d}$, où $\mathbf{u} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$. Nous avons vu précédemment que le choix $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$ minimise la distance $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$. Ainsi, $\hat{\mathbf{x}}$ est une solution des moindres carrés.

En résumé, on obtient une solution des moindres carrés de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ en trouvant une solution de

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}.$$

Si $\mathbf{A}$ est de plein rang, alors $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ est inversible. Dans ce cas, la solution des moindres carrés unique est donnée par

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}.$$

Exemple 12.4. Trouvons une solution des moindres carrés de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, où $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ en utilisant l'équation normale associée.

On note que $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ et que $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}$.

La solution des moindres carrés est alors

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Pour vérifier que c'est bien la bonne, il suffit de vérifier que $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$ et $\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$ sont orthogonaux. En effet,

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) &= \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ &= -2 + \frac{5}{9} + \frac{5}{9} + \frac{8}{9} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exercices

1. Déterminez une solution des moindres carrés de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, où $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, en résolvant l'équation normale associée.
2. Déterminez une solution des moindres carrés de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, où $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, en résolvant l'équation normale associée.
3. Montrez que la solution des moindres carrés de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est donnée par

   $$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b},$$

   où $(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-}$ dénote un pseudo-inverse de $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$.

Solutions

1. Notons que $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix}$.
   Ainsi, la solution des moindres carrés est
   $$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{23}{14} \\ -\frac{3}{7} \end{bmatrix}.$$

2. Notons que
   $$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$
   et
   $$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
   Mais $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ n'est pas inversible puisque la troisième colonne est la somme des deux premières colonnes. On résout $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$ en réduisant $\begin{bmatrix} \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} & \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b} \end{bmatrix}$ à la forme échelonnée réduite, qui devient
   $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{2}{11} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
   Il y a plusieurs solutions des moindres carrés; en voici une :
   $$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} \\ -\frac{1}{11} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. D'après le théorème 11.1, toutes les solutions de l'équation normale sont données par
   $$(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b} + (\mathbf{I}_n - (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}))\mathbf{u},$$
   $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. En prenant $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, on obtient le résultat désiré.

12.5 Ajustement de courbe par la méthode des moindres carrés

En statistique, pour des observations données (x_i, y_i), où $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ pour $i = 1, \ldots, n$, nous désirons souvent trouver une fonction simple f telle que $f(x_i)$ coïncide (presque) avec y_i pour $i = 1, \ldots, n$. Par exemple, la fonction pourrait prendre la forme $f(x) = \beta_0 + \beta_1 x$ pour des $\beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$. Dans un tel cas, nous cherchons ce que l'on appelle un ajustement linéaire.

Il y a plus d'une façon de déterminer β_0 et β_1; on peut entre autre obtenir une solution des moindres carrés du système

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

La matrice $\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}$ porte le nom de **matrice de conception** et est souvent dénotée par $\mathbf{X}$. La fonction obtenue de cette manière est l'**ajustement linéaire des moindres carrés.**

Exemple 12.5. Trouvons un ajustement linéaire des moindres carrés pour les observations $(1, 1), (3, 2), (7, 5)$, à l'aide du système

$$\mathbf{X} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \mathbf{y},$$

où $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

En utilisant la formule de la section précédante, une solution de moindres carrés est donnée par

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = (\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \frac{5}{28} \\ \frac{19}{28} \end{bmatrix}.$$

La figure 12.1 offre un tracé des observations et de la ligne d'équation $y = \frac{5}{28} + \frac{19}{28}x$.

Cette droite passe très près des trois points, comme nous pouvons le constater visuellement.

Notons que les ajustements des moindres carrés ne sont pas restreints aux fonctions linéaires. Considérons les observations suivantes, que l'on peut observer à la figure 12.2 :

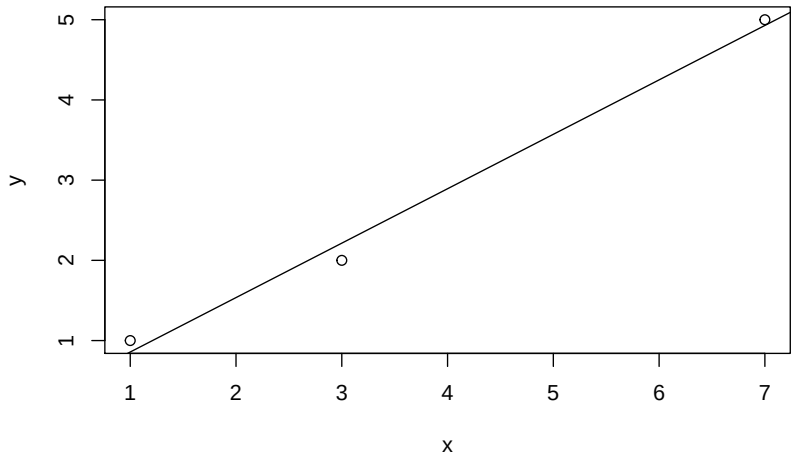

FIGURE 12.1 – Un ajustement linéaire des moindres carrés

i	x_i	y_i
1	-3	8
2	-1	1
3	1	0
4	2	4
5	5	23

Par le tracé, on voit qu'un ajustement linéaire ne semble pas optimal. Nous allons plutôt considérer un ajustement quadratique de la forme

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$$

pour $\beta_0, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

On trouve β_0, β_1 et β_2 en obtenant une solution des moindres carrés de

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \\ 1 & x_5 & x_5^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}.$$

Après avoir fait les calculs nécessaires, la solution des moindres carrés est

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{132}{559} \\ \frac{166}{11739} \\ \frac{10895}{11739} \end{bmatrix}.$$

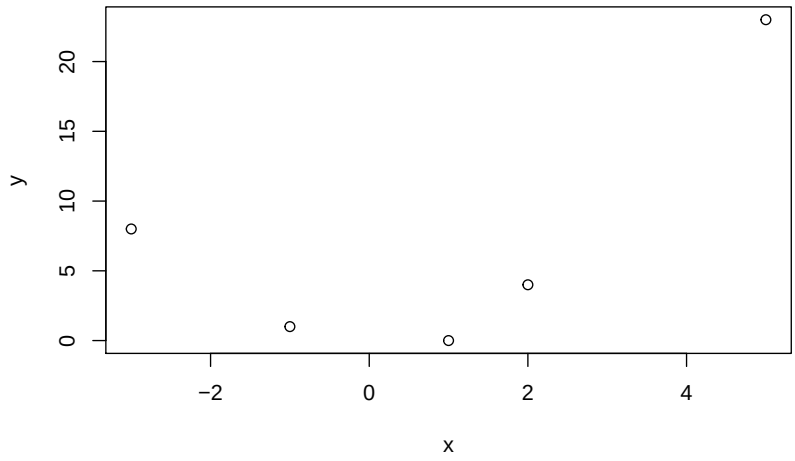

FIGURE 12.2 – Des observations

On retrouve un tracé de la courbe représentée par

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$$

à la figure 12.3. On constate que la courbe passe presque parfaitement à travers tous les points.

On peut utiliser la même idée pour ajuster des polynômes de degré supérieur à 2. Cependant, le **principe de simplicité** laisse entendu qu'il est toujours préférable de trouver une fonction simple qui s'ajuste aux données. Plusieurs critères existent pour mesurer la qualité d'un ajustement, mais faire un choix approprié relève plus souvent de l'art que de la science.

L'ajustement de courbe (ou plutôt l'ajustement de modèle) est un sujet très riche de l'étude des statistiques. C'est un ingrédient clef pour la prévision et l'apprentissage automatique. Le contenu présenté dans cette section couvre à peine la surface. On peut en apprendre plus en consultant des ouvrages portant sur la régression.

Exercice

1. Obtenez un ajustement linéaire des moindres carrés pour les observations suivantes :

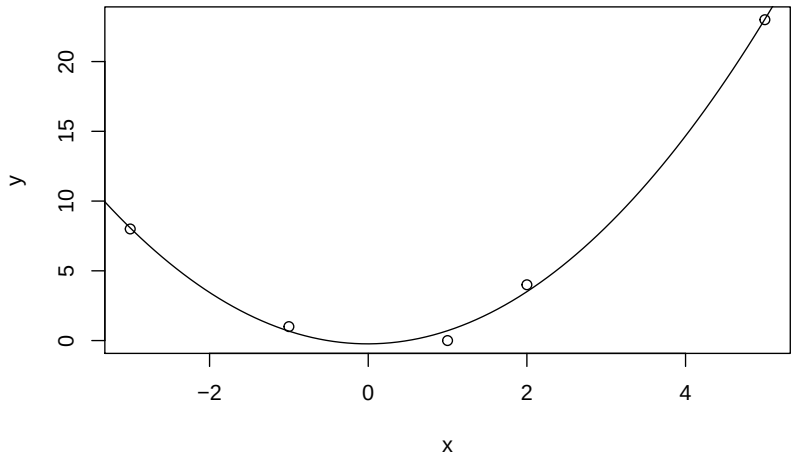

FIGURE 12.3 – Un ajustement quadratique des moindres carrés

i	x_i	y_i
1	-2	1
2	0	0
3	1	-2
4	2	1

Solution

1. Il suffit d'obtenir une solution des moindres carrés de

$$\mathbf{X}\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\end{bmatrix} = \mathbf{y},$$

où $\mathbf{X} = \begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 0\\ 1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ et $\mathbf{y} = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ -2\\ 1\end{bmatrix}$. Une telle solution est donnée par

$$\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\end{bmatrix} = (\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \begin{bmatrix}\frac{2}{35}\\ -\frac{8}{35}\end{bmatrix}.$$

12.6 Exemple de test portant sur la matière de ce chapitre

1. Déterminez une solution des moindres carrés de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, où $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
2. Déterminez toutes les solutions de moindres carrés de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, où $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
3. Obtenez un ajustement quadratique des moindres carrés pour les observations suivantes :

i	x_i	y_i
1	-3	1
2	-1	0
3	0	-2
4	4	6

Chapitre 13

Décomposition en valeurs singulières

Ce chapitre introduit une décomposition matricielle importante, la décomposition en valeurs singulières. Même si une telle décomposition n'est pas unique, chaque variante a des applications utiles. La maîtrise du matériel de ce chapitre permet de :

- Donner une motivation pour la décomposition en valeurs singulières d'une matrice.
- Définir les valeurs singulières et la décomposition en valeurs singulières.
- Calculer la décomposition en valeurs singulières d'une matrice.
- Résoudre des problèmes des moindres carrés en utilisant la décomposition en valeurs singulières.
- Construire des pseudo-inverses.

Les connaissances requises pour ce chapitre incluent les valeurs propres et vecteurs propres, l'orthogonalité, et la définition d'un pseudo-inverse de Moore-Penrose. Des connaissances à propos de l'ajustement par la méthode des moindres carrés sont recommandés, mais non requises.

13.1 Motivation

Dans ce manuel, nous avons abordé plusieurs façons de décomposer une matrice, différentes décompositions étant utiles dans différentes situations.

Par exemple, considérons $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$, où $\mathbb{K}$ est un corps. Alors $\mathbf{A}$ peut se décomposer selon $\mathbf{MR}$, où $\mathbf{M} \in \mathbb{K}^{m \times m}$ et $\mathbf{R} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ est de forme échelonnée réduite. Une telle décomposition permet d'identifier immédiatement le rang de $\mathbf{A}$, tout comme un ensemble de colonnes de $\mathbf{A}$ formant une base de $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$.

Supposons de plus que $m = n$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Si $\mathbf{A}$ est diagonalisable, alors $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ pour $\mathbf{P}, \mathbf{D} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telles que $\mathbf{P}$ soit inversible et $\mathbf{D}$ soit diagonale. Nous avons vu comment une telle décomposition permet de calculer aisément les puissances $\mathbf{A}^k$ pour tout entier positif k.

Nous avons aussi exploré le cas où $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est symétrique. Dans ce case, $\mathbf{A} = \mathbf{QDQ}^\mathsf{T}$ pour $\mathbf{Q}, \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telles que $\mathbf{Q}$ soit orthogonale et $\mathbf{D}$ soit diagonale. Examinons de plus près cette décomposition.

Rappelons que si $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est orthogonale, alors $\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{Q}^{-1}$. Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Alors,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{Qx}\| &= \sqrt{(\mathbf{Qx})^\mathsf{T}(\mathbf{Qx})} \\ &= \sqrt{\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Qx}} \\ &= \sqrt{\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{Ix}} \\ &= \sqrt{\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x}} \\ &= \|\mathbf{x}\|.\end{aligned}$$

Ainsi, l'application $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par $T(\mathbf{x}) = \mathbf{Qx}$ est une application linéaire préservant les longueurs; on dit qu'elle est une **isométrie**. Or, si $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est définie par $S(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$, alors $S(x) = \mathbf{QDQ}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ commence par appliquer une isométrie, pour ensuite mettre à l'échelle les composantes résultantes, et finalement appliquer l'inverse de l'isométrie. Lorsque $n = 2$, on peut visualiser une telle suite de transformations comme une rotation/réflexion suivie d'une mise à l'échelle, suivie de la rotation/réflexion inverse.

Que se passer-t-il si nous remplaçons la dernière transformation par une autre isométrie? Autrement dit, quelles matrices peut-on décomposer sous la forme

$$\mathbf{PDQ}^\mathsf{T},$$

où $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$ sont orthogonales et $\mathbf{D}$ est diagonale? Il s'avère que toutes les matrices de $\mathbb{R}^{n\times n}$ ont une telle décomposition!

Théorème 13.1. *Pour chaque $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, il existe une matrice diagonale $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et des matrices orthogonales $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telles que*

$$\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{T}.$$

On démontrer un résultat plus général dans une section ultérieure. Entre temps, nous allons étudier certains concepts importants.

Si $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{T}$, où $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ sont orthogonales et $\mathbf{\Sigma}$ diagonale, alors

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} &= \mathbf{V\Sigma}^\mathsf{T}\mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{T} \\ &= \mathbf{V\Sigma}^2\mathbf{V}^\mathsf{T},\end{aligned}$$

qui est une diagonalisation orthogonale de la matrice symétrique $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$. Si on choisit une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ arbitrairement, peut-on utiliser une diagonalisation orthogonale de $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ pour obtenir $\mathbf{\Sigma}$ et $\mathbf{V}$?

Rappelons que les valeurs propres de $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ sont réelles d'après le corollaire 7.1. De plus, les valeurs propres de $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ sont non négatives. On déduit ce fait en considérant un vecteur propre $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ associé à une valeur propre λ de $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$. Alors,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\mathbf{A}\mathbf{v}\|^2 \\ &= \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v} \\ &= \mathbf{v}^\mathsf{T}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{v}^\mathsf{T}(\lambda\mathbf{v}) \\ &= \lambda\|\mathbf{v}\|^2 \end{aligned}$$

Puisque $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, on doit avoir $\lambda \geq 0$. Ainsi, si on considère une décomposition orthogonale de $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ donnée par $\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^\mathsf{T}$, on peut construire la matrice diagonale $\mathbf{\Sigma}$ de sorte que tous les éléments de la diagonale soient non négatifs. En fait, ce sont précisément les racines carrés des éléments de la diagonale de $\mathbf{D}$. De plus, on pose $\mathbf{V} = \mathbf{Q}$. La prochaine étape est l'obtention d'une matrice orthogonale $\mathbf{U}$ telle que

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\mathsf{T}.$$

Supposons, pour simplifier le problème, que toutes les valeurs propres soient positives. Alors, $\mathbf{\Sigma}$ est inversible et $\mathbf{U}$ se doit d'être $\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}$. Est-ce que $\mathbf{U}$ est orthogonale? Puisque

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{U} &= \left(\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\right)^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1} \\ &= \mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{V}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{V})\mathbf{\Sigma}^{-1} \\ &= \mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q})\mathbf{\Sigma}^{-1} \\ &= \mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{\Sigma}^{-1} \\ &= \mathbf{D}\mathbf{\Sigma}^{-2} \\ &= \mathbf{D}\mathbf{D}^{-1} \\ &= \mathbf{I}, \end{aligned}$$

c'est bien le cas et $\mathbf{U}$ est orthogonale.

Si, au contraire, au moins une des valeurs propres est nulle, la situation est plus compliquée, mais conceptuellement semblable au cas précédent. On obtient alors le résultat suivant.

Théorème 13.2. *Pour chaque $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, il existe une matrice orthogonale $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, une matrice orthogonale $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, et une matrice diagonale $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ dont les éléments*

sont non négatifs, telles que

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathsf{T}}.$$

On en fera la démonstration dans les deux prochaines sections.

Précisons qu'une matrice de dimension $m \times n$ (c'est-à-dire qu'elle n'est pas nécessairement carrée) est dite **diagonale** si tous ses éléments (i, j) sont nuls lorsque $i \neq j$.

Le produit

$$\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathsf{T}}$$

porte le nom de **décomposition en valeurs singulières** de $\mathbf{A}$.

Une version existe aussi pour les matrices complexes :

Théorème 13.3. *Pour chaque $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, il existe une matrice unitaire $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{m\times m}$, une matrice unitaire $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, et une matrice diagonale $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ dont les éléments sont non négatifs, telles que*

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{*}.$$

Exercice

1. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Utilisez les idées présentées dans cette section pour obtenir des matrices orthogonales $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ et une matrice diagonale $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ dont les éléments sont non négatifs, telles que

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathsf{T}}.$$

Solution

1. Notons que $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. On peut choisir

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

On peut aisément vérifier que $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\mathsf{T}$.

13.2 Valeurs singulières

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Puisque $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}$ et $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ sont toutes deux réelles et symétriques, leurs valeurs propres sont des nombres réels d'après le corollaire 7.1. De plus, elles sont diagonalisable en base orthonormée selon le théorème 10.5. Nous allons procéder à l'étude approfondie de leurs valeurs propres.

Premièrement, les valeurs propres de $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ et les valeurs propres de $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}$ sont non négatifs, comme nous l'avons vu à la section précédente.

Ensuite, on voit que chaque valeur propre positive de $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ est aussi une valeur propre de $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}$. En effet, si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ est un vecteur propre de $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ associé à une valeur propre λ, alors $\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{v}$ est un vecteur propre de $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}$ également associé à λ :

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}.$$

Notons que $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, autrement

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{u} \\ &= (\mathbf{A}\mathbf{v})^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v} \\ &= \mathbf{v}^\mathsf{T}(\lambda\mathbf{v}) \\ &= \lambda\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{v} \\ &= \lambda\|\mathbf{v}\|^2 > 0, \end{aligned}$$

ce qui serait une contradiction.

On peut montrer de la même façon que toute valeur propre de $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}$ est aussi une valeur propre de $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$. Conséquemment, $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}$ et $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ ont les mêmes valeurs propres. De plus, les valeurs propres ont les mêmes multiplicités. (Puisque les deux matrices sont diagonalisables, nous n'avons pas vraiment besoin de distinguer la multiplicité algébrique et la multiplicité géométrique.) On réalise mieux ce fait en démontrant le résultat suivant :

Proposition 13.1. *Soit $\{\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}\}$ une base de l'espace vectoriel des vecteurs propres de $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ associé à la valeur propre positive λ. Alors, les vecteurs $\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{A}\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k)}$ sont linéairement indépendants.*

Comme nous avons démontré au préalable, $\mathbf{u}^{(i)}$ est un vecteur propre de $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}$ associé à λ pour chaque $i = 1, \ldots, k$. Ainsi, si $\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)}$ sont linéairement indépendants, la multiplicité géométrique de λ par rapport à $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}$ doit être supérieure ou égale à k. En utilisant un argument similaire dans l'autre direction, on voit que la multiplicité géométrique de λ par rapport à $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ et celle par rapport à $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}$ sont égales.

Démonstration. (Proposition 13.1) Supposons qu'au contraire $\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(k)}$ ne soient pas linéairement indépendants. Alors il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que

$$\alpha_1 \mathbf{u}^{(1)} + \cdots + \alpha_k \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{0}.$$

En multipliant chacun des côtés à gauche par $\mathbf{A}^\mathsf{T}$, nous obtenons

$$\alpha_1 \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u}^{(1)} + \cdots + \alpha_k \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{0},$$

ou, de façon équivalente,

$$(\alpha_1\lambda)\mathbf{v}^{(1)} + \cdots + (\alpha_k\lambda)\mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{0}.$$

Puisque $\lambda > 0$ et que $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ sont non tous nuls, on en déduit que $\alpha_1\lambda, \ldots, \alpha_k\lambda$ sont non tous nuls. Ceci contredit l'indépendence linéaire de $\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}$. □

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres positives de $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ ou $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}$, ordonnées selon $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r$. Les **valeurs singulières de $\mathbf{A}$** sont $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, $i = 1, \ldots, r$.

Exercice

1. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Déterminez toutes les valeurs singulières de $\mathbf{A}$.

Solution

1. Notons que

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Puisque

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}}(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 5-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(5-\lambda)(4-\lambda) - 4(1-\lambda) - 4(4-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 21\lambda \\ &= -\lambda(\lambda-3)(\lambda-7), \end{aligned}$$

les valeurs propres de $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ sont 0, 3, et 7. Ainsi, les valeurs singulières de $\mathbf{A}$ sont $\sqrt{7}$ et $\sqrt{3}$.

13.3 Démonstration et exemples

On démontre maintenant le théorème 13.2.

Soit $\mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^\mathsf{T}$ une diagonalisation en base orthonormée de $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ telle que tous les éléments positifs de $\mathbf{D}$ sont placés dans les r premiers éléments de la diagonale. Supposons aussi que les valeurs propres sont énumérées par $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, où $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r$.

Pour $i = 1, \ldots r$, on dénote $\sqrt{\lambda_i}$ par σ_i, la i-ième colonne de $\mathbf{V}$ par $\mathbf{v}^{(i)}$, et $\frac{1}{\sigma_i}\mathbf{A}\mathbf{v}^{(i)}$ par $\mathbf{u}^{(i)}$.

Notons que $\mathbf{u}^{(i)}$ est unitaire pour chaque $i = 1, \ldots, r$ puisque

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}^{(i)}\|^2 &= {\mathbf{u}^{(i)}}^\mathsf{T}\mathbf{u}^{(i)} \\
&= \frac{1}{\sigma_i^2}{\mathbf{v}^{(i)}}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v}^{(i)} \\
&= \frac{1}{\lambda_i}{\mathbf{v}^{(i)}}^\mathsf{T}(\lambda_i\mathbf{v})^{(i)} \\
&= {\mathbf{v}^{(i)}}^\mathsf{T}\mathbf{v}^{(i)} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^{(i)} \cdot \mathbf{u}^{(j)} &= {\mathbf{u}^{(i)}}^\mathsf{T}\mathbf{u}^{(j)} \\
&= \frac{1}{\sigma_i\sigma_j}{\mathbf{v}^{(i)}}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v}^{(j)} \\
&= \frac{\lambda_j}{\sigma_i\sigma_j}{\mathbf{v}^{(i)}}^\mathsf{T}\mathbf{v}^{(j)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

lorsque $i \neq j$. Ainsi, on peut construire une base orthonormée $\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(m)}\}$ de $\mathbb{R}^m$, à partir de $\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(r)}\}$.

Soit $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ la matrice diagonale telle que le i-ième élément de la diagonale est σ_i pour $i = 1, \ldots, r$ et tous les autres éléments sont nuls. Alors,

$$\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}.$$

Puisque $\mathbf{V}$ est orthogonale, on multiplie à droite de chaque côté par $\mathbf{V}^\mathsf{T}$ afin d'obtenir

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\mathsf{T},$$

ce qui complète la démonstration du théorème 13.2.

Exemple 13.1. Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Nous obtenons une décomposition en valeurs singulières de la matrice $\mathbf{A}$.

Premièrement, les valeurs propres de $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ sont obtenues en trouvant les racines du polynôme charactéristique

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-3)(\lambda-1)$$

Ainsi, les valeurs propres sont 3, 1 et 0. Posons $\sigma_1 = \sqrt{3}$ et $\sigma_2 = 1$.

La forme échelonnée réduite de $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} - 3\mathbf{I}$ est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ainsi, une base orthonormée de $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} - 3\mathbf{I})$ est donnée par le vecteur $\mathbf{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$. Posons $\mathbf{u}^{(1)} = \frac{1}{\sigma_1}\mathbf{A}\mathbf{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

La forme échelonnée réduite de $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} - \mathbf{I}$ est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ainsi, une base orthonormée de $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} - \mathbf{I})$ est donnée par le vecteur $\mathbf{v}^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. Posons $\mathbf{u}^{(2)} = \frac{1}{\sigma_2}\mathbf{A}\mathbf{v}^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

La forme échelonnée réduite de $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} - 0\mathbf{I}$ est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ainsi, une base orthonormée de $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} - 0\mathbf{I})$ est donnée par le vecteur $\mathbf{v}^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$.

En posant $\mathbf{U} = \begin{bmatrix}\mathbf{u}^{(1)} & \mathbf{u}^{(2)}\end{bmatrix}$, $\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\end{bmatrix}$, et $\mathbf{V} = \begin{bmatrix}\mathbf{v}^{(1)} & \mathbf{v}^{(2)} & \mathbf{v}^{(3)}\end{bmatrix}$, on obtient $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\mathsf{T}$, où $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ sont des matrices orthogonales.

Les calculs permettant d'obtenir une décomposition en valeurs singulières sont très long à faire à la main. Par conséquence, on utilise souvent des progiciels tels que Matlab [1] ou GNU Octave [2] dans lesquels la commande `svd` (pour l'équivalent anglais « *singular-value decomposition* ») calcule une décomposition en valeurs singulières d'une matrice.

Exercices

1. Obtenez une décomposition en valeurs singulière de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix}$.
2. Obtenez une décomposition en valeurs singulière de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}-2 & 11\\ 5 & 10\\ 14 & -2\end{bmatrix}$.

1. Voir https://www.mathworks.com/products/matlab.html
2. Voir https://www.gnu.org/software/octave

Solutions

1. Notons que $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$. On prend $\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Alors, $\mathbf{u}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{u}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$.

   La forme échelonnée réduite de $\begin{bmatrix} {\mathbf{u}^{(1)}}^\mathsf{T} \\ {\mathbf{u}^{(2)}}^\mathsf{T} \end{bmatrix}$ est $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Un vecteur non nul appartenant au noyau de $\mathbf{R}$ est $\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$. Donc,

$$\mathbf{u}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 3^2}} \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

   En prenant

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{3} \end{bmatrix},$$

   nous obtenons $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\mathsf{T}$.

   Si on insiste pour écrire que les valeurs singulières soient ordonnées de manière décroissantes, on peut choisir

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{3} \end{bmatrix}, \ \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Notons que $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 225 & 0 \\ 0 & 225 \end{bmatrix}$. On prend $\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 15 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Alors, $\mathbf{u}^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{15} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{14}{15} \end{bmatrix}$ et $\mathbf{u}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{11}{15} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{15} \end{bmatrix}$. La forme échelonnée réduite de $\begin{bmatrix} {\mathbf{u}^{(1)}}^\mathsf{T} \\ {\mathbf{u}^{(2)}}^\mathsf{T} \end{bmatrix}$ est $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Un vecteur non nul appartenant au noyau de $\mathbf{R}$ est $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Donc,

$$\mathbf{u}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

En prenant

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{15} & \frac{11}{15} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{14}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

on obtient $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathsf{T}}$.

13.4 Retour sur la méthode des moindres carrés

Rappelons qu'une solution des moindres carrés d'un système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ est un vecteur $\mathbf{x}$ qui minimise $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$.

Dans cette section, nous utilisons la décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{A}$ afin de trouver une solution des moindres carrés sans utiliser le calcul différentiel ou les projections orthogonales.

Observons que le problème initial revient à minimiser $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2$.

Soit $\mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{T}$ une décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{A}$. Si $\mathbf{y} = \mathbf{V}^\mathsf{T}\mathbf{x}$, alors

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2 &= (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^\mathsf{T}(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) \\
&= (\mathbf{U\Sigma y} - \mathbf{b})^\mathsf{T}(\mathbf{U\Sigma y} - \mathbf{b}) \\
&= (\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{\Sigma}^\mathsf{T}\mathbf{U}^\mathsf{T} - \mathbf{b}^\mathsf{T})(\mathbf{U\Sigma y} - \mathbf{b}) \\
&= (\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{\Sigma}^\mathsf{T}\mathbf{U}^\mathsf{T})(\mathbf{U\Sigma y}) - 2\mathbf{y}^\mathsf{T}(\mathbf{\Sigma}^\mathsf{T}\mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{b}) + \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{b} \\
&= \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{\Sigma}^\mathsf{T}\mathbf{\Sigma y} - 2\mathbf{y}^\mathsf{T}(\mathbf{\Sigma}^\mathsf{T}\mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{b}) + \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{b}
\end{aligned}$$

Observons que $\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{b}$ est une constante et que $\mathbf{\Sigma}^\mathsf{T}\mathbf{\Sigma}$ est une matrice diagonale carrée où le i-ième élément de la diagonale est nul lorsque $i > r$, r étant le nombre de valeurs singulières de $\mathbf{A}$.

En prenant $\mathbf{d} = \mathbf{\Sigma}^\mathsf{T}\mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{b}$, on peut réécrire $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{\Sigma}^\mathsf{T}\mathbf{\Sigma y} - 2\mathbf{y}^\mathsf{T}(\mathbf{\Sigma}^\mathsf{T}\mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{b})$ sous la forme

$$\sum_{i=1}^{r}(\sigma_i^2 y_i^2 - 2d_i y_i) = \sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2\left(y_i^2 - 2\frac{d_i}{\sigma_i^2}y_i\right).$$

La complétion du carré donne

$$\sum_{i=1}^{r}\left(\sigma_i^2\left(y_i - \frac{d_i}{\sigma_i^2}\right)^2 - \left(\frac{d_i}{\sigma_i}\right)^2\right). \tag{13.1}$$

Ainsi, le minimum est atteint lorsque $y_i = \frac{d_i}{\sigma_i^2}$ pour $i = 1, \ldots, r$, ou, de façon équivalente, lorsque $y_i = \frac{1}{\sigma_i}(\mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{b})_i$ pour $i = 1, \ldots, r$. Posons $y_i = 0$ lorsque $i > r$. Puisque $\sigma_i = 0$ dans ce cas, le vecteur $\mathbf{y}$ devient

$$\mathbf{y} = \mathbf{\Sigma}^+\mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{b},$$

où $\mathbf{\Sigma}^+$ est obtenu de $\mathbf{\Sigma}$ en remplaçant chaque élément non nul par son inverse et en prenant la transposée de la matrice ainsi obtenue. Puisque $\mathbf{y} = \mathbf{V}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ et que $\mathbf{V}$ est une matrice orthogonale, on obtient

$$\mathbf{x} = \mathbf{Vy} = \mathbf{V}(\mathbf{\Sigma}^+\mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{b}) = (\mathbf{V\Sigma}^+\mathbf{U}^\mathsf{T})\mathbf{b}.$$

La matrice $\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{+}\mathbf{U}^{\mathsf{T}}$ est un pseudo-inverse de Moore-Penrose de $\mathbf{A}$ et est dénotée par $\mathbf{A}^{+}$.

Autrement dit, $\mathbf{A}^{+}\mathbf{b}$ est une solution des moindres carrés de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Notons qu'il peut y avoir plusieurs solutions des moindres carrés. Comme nous l'avons vu précédemment, on peut utiliser toute autre valeur non nulle pour y_i, $i > r$. Cependant, si toutes ces valeurs sont nulles, on obtient une solution $\mathbf{x}$ qui minimise $\|\mathbf{x}\|$.

Exemple 13.2. Soient $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ \frac{2}{5} & \frac{11}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{11}{5} \end{bmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Nous obtenons une solution des moindres carrés de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en calculant $\mathbf{A}^{+}\mathbf{b}$.

Le produit $\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathsf{T}}$ est une décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{A}$, où

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

Si

$$\mathbf{A}^{+} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{U}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} \frac{11}{40} & \frac{11}{40} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

une solution des moindres carrés est donnée par $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{20} \\ \frac{6}{5} \end{bmatrix}$.

Exercices

1. Utilisez la méthode décrite dans cette section afin d'obtenir la solution des moindres carrés de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, où $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 11 \\ 5 & 10 \\ 14 & -2 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Vous pouvez utiliser la

décomposition en valeurs singulières suivante de $\mathbf{A}$:

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{15} & \frac{11}{15} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{14}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 15 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Supposons que la décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{A}$ est donnée par $\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\mathsf{T}$, où $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sont orthogonales et $\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma > 0$.

   a. Montrez que $\mathbf{G} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma} & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \mathbf{U}^\mathsf{T}$ est un pseudo-inverse de $\mathbf{A}$ pour tout $\delta \in \mathbb{R}$.

   b. Donnez deux pseudo-inverses distincts de $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

Solutions

1. Notons que
$$\mathbf{A}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{15} & \frac{1}{3} & \frac{14}{15} \\ \frac{11}{15} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{15} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$
On obtient alors une solution des moindres carrés en calculant
$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^+\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{2}{15} \\ -\frac{1}{15} \end{bmatrix}.$$

2. a. Montrons que $\mathbf{AGA} = \mathbf{A}$. Si $\mathbf{S}$ dénote la matrice $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma} & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}$, alors
$$\begin{aligned} \mathbf{AGA} &= (\mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{T})(\mathbf{VSU}^\mathsf{T})(\mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{T}) \\ &= \mathbf{U\Sigma S\Sigma V}^\mathsf{T} \\ &= \mathbf{U} \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma} & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{V}^\mathsf{T} \\ &= \mathbf{U} \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{V}^\mathsf{T} \\ &= \mathbf{U} \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{V}^\mathsf{T} \\ &= \mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{T} \\ &= \mathbf{A} \end{aligned}$$
tel que désiré.

b. Une décomposition en valeurs singulières de $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ est donnée par
$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$
En utilisant le résultat de la partie précédente, les deux matrices suivantes sont des pseudo-inverses de $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$:
$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$
et
$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}.$$

13.5 Exemple de test portant sur la matière de ce chapitre

1. Obtenez une décomposition en valeurs singulières de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
2. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de rang r. Démontrez qu'il existe $\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(r)} \in \mathbb{R}^m$ et $\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(r)} \in \mathbb{R}^n$ tels que
$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{u}^{(i)} {\mathbf{v}^{(i)}}^{\mathsf{T}}.$$
3. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice symétrique. Soit $\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathsf{T}}$ une décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{A}$. Montrez que si $\mathbf{A}$ est définie positive, alors $\mathbf{U} = \mathbf{V}$.

Chapitre 14

Applications

Dans ce dernier chapitre, nous examinons un certain nombre d'applications. Comme il n'y a pas de dépendance entre les sections, les applications peuvent être étudiées individuellement et dans n'importe quel ordre.

14.1 Graphisme dans le plan

Certaines opérations fondamentales en graphisme informatique utilisent des concepts propres à l'algèbre linéaire. Les processeurs graphiques ont souvent une composante physique dédiée exclusivement à la multiplication matricielle en parallèle. Dans cette section, nous étudions trois opérations graphiques communes, en passant par la la multiplication matricielle telle que retrouvée dans le standard OpenGL.

14.1.1 Opérations graphiques

Les trois opérations que sous considérations sont la translation, la dilatation, et la rotation. Nous illustrons l'effet de chaque opération sur le cercle unitaire dans le plan :

$$C := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \ : \ x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\}.$$

14.1.2 Translation

Notons que le centre de C se situe à l'origine. On peut déplacer le cercle unitaire de façon à ce que le centre se retrouve à $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$, tout simplement en additionnant le vecteur $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ à

chaque élément de C. Le résultat peut prend la forme

$$C' := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 + p \\ x_2 + q \end{bmatrix} \ : \ x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\}.$$

Cet ensemble peut aussi s'écrire sous la forme

$$C' := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \ : \ (x_1 - p)^2 + (x_2 - q)^2 = 1 \right\}.$$

Donc, la translation de points du plan est réalisée par l'addition d'uplet. Nous décrirons plus tard les translations à l'aide de multiplication matricielle.

14.1.3 Dilatation

Pour étirer le cercle unitaire horizontalement par un facteur de deux, il suffit de multiplier la coordonnée x_1 de chaque élément de C par 2. Le résultat prend la forme

$$C'' := \left\{ \begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \ : \ x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\}.$$

Cet ensemble peut aussi s'écrire sous la forme

$$C'' := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \ : \ \left(\frac{x_1}{2}\right)^2 + x_2^2 = 1 \right\}.$$

Nous pouvons aussi étirer simultanément à la verticale. En fait, si le facteur d'étirement horizontal est a et le facteur vertical est b, nous obtenons, pour $a, b > 0$,

$$C''' := \left\{ \begin{bmatrix} ax_1 \\ bx_2 \end{bmatrix} \ : \ x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\},$$

ou encore

$$C''' := \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \ : \ x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\}.$$

La matrice $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ est une **matrice de dilatation**. Notons que cette matrice est inversible et son inverse est $\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$.

14.1.4 Rotation

Soit $\mathbf{R}(\theta)$ la matrice $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, où $\theta \in \mathbb{R}$.

La rotation par θ radians d'un ensemble S par rapport à l'origine est donnée par

$$\left\{ \mathbf{R}(\theta) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \ : \ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in S \right\}.$$

Il va de soit que la rotation de C par rapport à l'origine ne modifie pas l'ensemble de points. Ce n'est pas le ca pour tous les ensembles, cependant.

Considérons $S := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \ : \ 0 \leq x_1 \leq 1 \right\}$, le segment de droite compris entre l'origine et le point $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Pour tourner ce segment par un angle de $\pi/4$ radians, on forme d'abord $\mathbf{R}(\pi/4)$, qui est $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. Ainsi,

$$S' := \left\{ \mathbf{R}(\pi/4) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \ : \ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in S \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 \end{bmatrix} \ : \ 0 \leq x_1 \leq 1 \right\}.$$

En dessinant cet ensemble, on voit que le segment de droite compris entre l'origine et le point $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ peut effectivement être obtenu à partir de S en effectuant une rotation de $\pi/4$ radians par rapport à l'origine.

La matrice $\mathbf{R}(\theta)$ est appelée **matrice de rotation**. On peut facilement vérifier que son inverse est $\mathbf{R}(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, qui est aussi une matrice de rotation.

14.1.5 Soulèvement et projet

En résumé, si S est un ensemble de points dans le plan, il nous est possible de faire une translation par l'addition d'uplet, et de dilater et produire une rotation (par rapport à l'origine) en multipliant chaque éléments de S par une matrice appropriée.

Nous décrivons maintenant une approche qui nous permettant d'unifier les trois opérations en utilisant la multiplication matricielle. Pour ce faire, nous devons cependant utiliser une dimension supplémentaire.

Premièrement, soit $S' = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \ : \ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in S \right\}$. On dit que l'ensemble S est **soulevé** du plan dans l'espace à 3 dimensions.

La matrice correspondant à une translation horizontale par p et une translation verticale par q est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

La matrice correspondant à une dilatation horizontale de facteur a et une dilatation verticale de facteur b est $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Finalement, la matrice correspondant à une rotation d'angle θ par rapport à l'origine est $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Nous obtenons alors

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+p \\ y+q \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ by \\ 1 \end{bmatrix},$$

et

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cos\theta)x - (\sin\theta)y \\ (\sin\theta)x + (\cos\theta)y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

On projette dans le plan en n'utilisant que les deux composantes du haut de chacun des résultats, ce qui correspond aux transformations recherchées.

Notons que la troisième composante dans tous les cas demeure 1. Nous pouvons ainsi ficeler ensemble les opérations à l'aide d'un produit de matrices. Par exemple, l'opération qui consiste en une dilatation suivie d'une translation peut être représentée par le produit

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Notons l'ordre selon lequel les matrices se présentent.

Nous avons vu que les dilatations et la rotation sont faites par rapport à l'origine. Que faire si nous désirons les faire par rapport à un autre point $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$? Nous devons d'abord faire subir à l'ensemble une translation selon $\begin{bmatrix} -p \\ -q \end{bmatrix}$, pour ensuite effectuer la dilatation ou la rotation par rapport à l'origine demandée, et finalement translater le résultat par $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$. Par exemple, l'opération pour un rotation de θ par rapport à $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ est représentée par le produit de matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -p \\ 0 & 1 & -q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Les idées pour les opérations en 3D sont similaires. Plus de détails peuvent être obtenus au site OpenGL.

Exercices

1. Décrivez comment effectuer une réflexion par rapport à l'axe horizontal en utilisant un produit de matrices.
2. Décrivez comment effectuer une réflexion par rapport à la droite définie par $ax + by + c = 0$ en utilisant un produit de matrices.

14.2 Différentiation de polynômes

Rappelons que dans la définition d'une application linéaire $T : V \to W$, V et W ne doivent pas nécessairement être de dimension finie. Lorsque l'un de V ou W est de dimension infinie, la représentation de T par une matrice de taille finie est impossible (quoique le concept d'une matrice infinie existe).

Avant d'en arriver à un tel exemple, commençons par étudier un cas spécial.

Soit P_k l'espace vectoriel des polynômes en x à coefficients réels de degré au plus k :

$$P_k = \{a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \,:\, a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Notons que $\dim(P_k) = k + 1$ pour tout k.

Soit $D_1 : P_2 \to P_1$ l'application définie par

$$D(ax^2 + bx + c) = 2ax + b.$$

On voit que D est linéaire. En effet, si $\mathbf{u} = a_1x^2 + b_1x + c_1$ et $\mathbf{v} = a_2x^2 + b_2x + c_2$, alors

$$\begin{aligned} D(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= D((a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)) \\ &= 2(a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2) \\ &= 2(a_1x + b_1) + (2a_2x + b_2) \\ &= D(\mathbf{u} + \mathbf{v}). \end{aligned}$$

De plus, si $\mathbf{u} = ax^2 + bx + c$ et $\gamma \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} D(\gamma\mathbf{u}) &= D((\gamma a)x^2 + (\gamma b)x + \gamma) \\ &= 2(\gamma a)x + \gamma b \\ &= \gamma(2ax + b) = \gamma D(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

De façon générale, pour chaque entier positif k, l'application $D_k : P_{k+1} \to P_k$ définie par

$$D_k(a_{k+1}x^{k+1} + a_kx^k + \cdots + a_1x + a_0) = (k+1)a_{k+1}x^k + ka_kx^{k-1} + \cdots + a_1$$

est linéaire.

Ceux et celles d'entre vous ayant déjà suivi un cours de calcul différentiel reconnaîtrait l'image de D_k — c'est tout simplement la dérivée de la fonction de départ.

Retirons maintenant la restriction sur le degré et considérons P, l'espace vectoriel des polynômes en x à coefficients réels. Notons que P est de dimension infinie.

Si $D : P \to P$ est définie par

$$D(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$$

pour tout entier $n \geq 0$ et $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$, alors il est possible de vérifier que D est une transformation linéaire qui ne peut être représentée par une matrice de taille finie.

En fait, la différentiation est une application linéaire sur des espaces de fonctions plus générales. Les espaces vectoriels de fonctions infiniment différentiables sont très communément utilisés pour le traitement des signaux, entre autre.

Exercices

1. Soit $\Gamma = (x^2, x, 1)$ une base ordonnée de P_2 et $\Omega = (x, 1)$ une base ordonnée de P_1. Déterminez $[D_1]_\Gamma^\Omega$.
2. Soit k un entier positif. Soit $\Gamma = (x^{k+1}, x^k, \ldots, x, 1)$ une base ordonnée de P_{k+1} et $\Omega = (x^k, x^{k-1}, \ldots, x, 1)$ une base ordonnée de P_k. Déterminez $[D_k]_\Gamma^\Omega$.
3. Soit F l'ensemble des fonctions $\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k \sin(kx) + \beta_k \cos(kx))$ telles que $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, pour tout $k = 0, 1, \ldots$, et pour lesquelles un nombre fini des α_k et β_k au plus sont non nuls.

   a. Montrez que F est un espace vectoriel de dimension infinie. (Indice : Montrez que $\sin(x), \sin(2x), \sin(4x), \ldots, \sin(2^i x), \ldots$ sont des fonctions linéairement indépendants.)

   b. Montrez que si f appartient à F, c'est également le cas pour la dérivée de f.

14.3 Approximation pour une matrice de rang inférieur

Une image numérique en niveaux de gris peut être représentée par une matrice dont chaque élément représente un pixel. L'idée fondamentale qui sous-tend la compression d'image avec perte est l'obtention d'*une représentation matricielle* voisine $\mathbf{A}$ qui requiert moins de stockage que cette dernière. Dans cette section, nous allons tenter de trouver des matrices $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$ pour lesquelles $\mathbf{A} \approx \mathbf{PQ}$, et telles que $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$ prennent le moins de stockage possible.

Nous devons répondre à deux questions :

1. Qu'entend-on par une matrice voisine d'une autre?
2. Comment obtient-on les matrices $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$?

14.3.1 La norme de Frobenius

Pour mesurer la « distance » entre deux matrices, nous utilisons **la norme de Frobenius** d'une matrice.

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. La norme de Frobenius de $\mathbf{A}$, dénotée par $\|\mathbf{A}\|_F$, est la quantité

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2}.$$

Si $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, alors la **distance entre $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$** dénotée par $d(\mathbf{A},\mathbf{B})$, est la quantité

$$\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|_F.$$

Plus la valeur de $d(\mathbf{A},\mathbf{B})$ est petite, plus les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont voisines. Notons que $d(\mathbf{A},\mathbf{B}) = d(\mathbf{B},\mathbf{A})$.

Exemple 14.1. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, alors

$$d(A,B) = \|A-B\|_F = \left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right\|_F = \sqrt{0^2+1^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{6}.$$

14.3.2 Application à la compression d'images avec pertes

Pour la compression d'images, nous devons trouver de bonnes approximations qui requièrent moins de stockage. Une matrice de rang inférieur peut s'avérer être très utiles dans ce cas.

Supposons que $\mathbf{B}$ soit une matrice de rang r. Rappelons que l'on peut obtenir, par réduction de matrices, une matrice inversible $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ et une matrice $\mathbf{R}$ sous forme échelonnée réduite telles que $\mathbf{B} = \mathbf{MR}$.

Puisque $\mathbf{B}$ est de rang r, les $m - r$ dernières lignes de $\mathbf{R}$ ne contiennent que des nuls. Donc, si $\mathbf{P}$ correspond aux les premières r colonnes de $\mathbf{M}$ et si $\mathbf{Q}$ correspond aux premières r lignes de $\mathbf{R}$, alors $\mathbf{PQ} = \mathbf{MR} = \mathbf{B}$. Conséquemment, si r est beaucoup plus petit que $\min(m, n)$, l'espace requis afin de stocker $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$ peut être substantiellement moindre que l'espace requis afin de stocker $\mathbf{B}$.

En résumé, une façon d'utiliser la compression d'images avec perte, pour des bitmaps en noir et blanc, est de trouver une matrice de faible rang dont la distance à la matrice de l'image originale est petite. Nous utilisons la décomposition en valeurs singulières pour obtenir une telle matrice.

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Soit r un entier positif plus petit que le minimum de m et n. Considérons un décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{A}$ obtenue par $\mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{T}$ telle que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots$ où σ_i dénote l'élément (i, i) de $\mathbf{\Sigma}$.

Soient $\mathbf{U}_r$ et $\mathbf{V}_r$ les matrices obtenues des r premières colonnes de $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$, respectivement. Soit $\mathbf{\Sigma}_r \in \mathbb{R}^{r\times r}$ une matrice diagonale telle que le i-ième élément de la diagonale est donné par l'élément (i, j) de $\mathbf{\Sigma}$ pour $i = 1, \ldots r$.

Le théorème de Eckart-Young dit que la matrice $\mathbf{M} = \mathbf{U}_r\mathbf{\Sigma}_r\mathbf{V}_r^\mathsf{T}$ est une matrice de rang r qui minimise $\|\mathbf{A} - \mathbf{M}\|_F$. Autrement dit, toutes les autres matrices de taille $m \times n$ de rang r sont aux moins aussi éloignées de $\mathbf{A}$ que $\mathbf{M}$ l'est. Bien entendu, la distance est donnée par la norme de Frobenius. La preuve de ce résultat est trop sophistiquée pour le présent ouvrage et ne sera pas présentée. (Pour la matrice $\mathbf{A}$ à l'exemple ci-dessus, $u_1\sigma_1 v_1^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ est de rang 1 et est voisine de $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Quelle est la distance entre les deux matrices?)

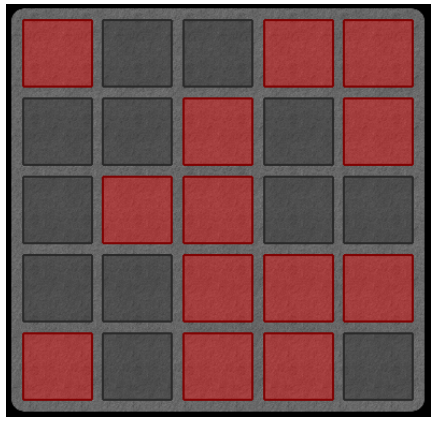

FIGURE 14.1 – Tableau de « Lights Out »

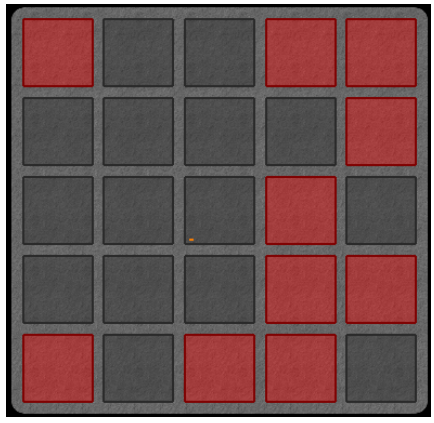

FIGURE 14.2 – Carré du milieu appuyé

14.4 « Lights Out »

« Lights Out » est un jeu électronique. (On trouve une version sur le Web [1].) La version typique consiste en un tableau carré de taille 5×5. Certains carrés sont allumés en début de partie; les autres sont éteints.

Lorsqu'on appuie sur un carré, ce dernier ainsi que les carrés immédiatement au-dessus, au-dessous, à gauche, et à droite changent de phase (d'éteint à allumé ou d'allumé à éteint). Par exemple, lorsque l'on commence avec la configuration montrée à la figure 14.1,

et que l'on appuie sur le carré en position (3,3), on obtient la configuration à la figure 14.2.

1. http://people.math.carleton.ca/~kcheung/math/apps/lights_out.html.

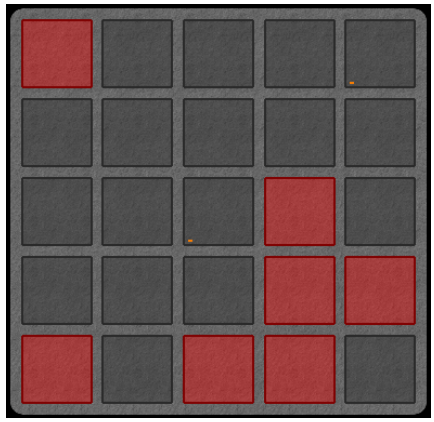

FIGURE 14.3 – Carrés du milieu et en haut à droite appuyés

Ensuite, on appuie sur le carré en haut à droite afin d'obtenir la configuration montrée à la figure 14.3 :

L'objectif de « Lights Out » est d'éteindre toutes les lumières du tableau.

14.4.1 Modélisation

Nous allons maintenant procéder à une analyse mathématique de ce jeu Avant de débuter, voici deux observations :

1. Appuyer sur un même carré un nombre pair de fois n'a aucun effet sur la configuration des lumières.
2. L'ordre dans lequel les carrés sont appuyés n'a pas d'importance.

Conséquemment, on peut décrire la solution d'une joute tout simplement en énumérant les carrés que l'on doit appuyer. Par exemple, si on n'appuie qu'une seule fois sur les carrés ayant une bordure verte à la figure 14.4, toutes les lumières seront éteintes.

Nous pouvons modéliser la configuration des lumières à partir d'une matrice d'éléments de $GF(2)$. Par exemple, la configuration montrée à la figure 14.1 peut être représentée par la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

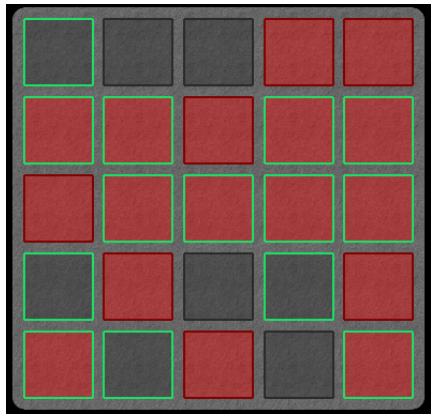

FIGURE 14.4 – Tableau de « Lights Out » avec solution

L'action d'appuyer sur un carré peut aussi être représentée par une matrice d'éléments de $GF(2)$, où 0 représente un carré qui n'est pas affecté et 1 représente un carré affecté. Par exemple, l'action d'appuyer sur le carré du milieu et sur celui du haut à droite sont représentées par

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

respectivement.

Pour obtenir le résultat de ces deux actions sur la configuration initiale, il suffit simplement de calculer

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

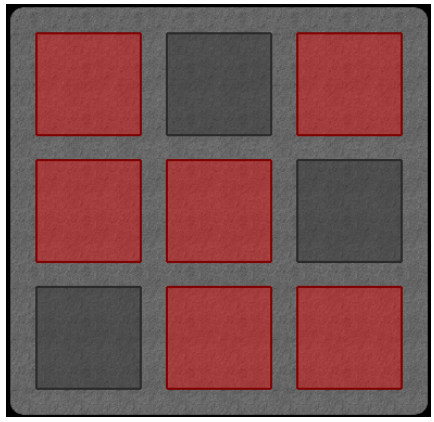

FIGURE 14.5 – Tableau de « Lights Out » 3x3

Le résultat est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Même si une matrice de taille 5×5 correspond très bien au tableau de « Lights Out », il est plus utile d'utiliser les uplets. On représente une planche de jeu de taille 5×5 à l'aide d'un 25-uplet. Illustrons cette idée à l'aide d'une planche de taille 3×3. Considérons la configuration montrée à la figure 14.5.

Elle peut être représenté par un 9-uplet $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Les trois premiers éléments de l'uplet correspondent aux carrés de la première ligne (lus de gauche à droite), les trois éléments suivants aux carrés de la seconde ligne et les trois derniers éléments aux carrés de la dernière ligne.

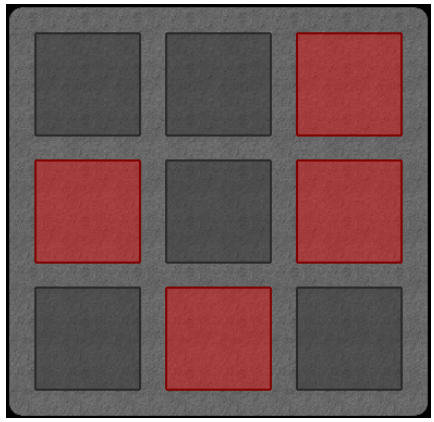

FIGURE 14.6 – Configuration « Lights Out » (3 x 3)

On appuie sur le carré du milieu, ce qui es représenté par $\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\\1\\1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$. En additionnant (dans $GF(2)$) cet uplet à la configuration initiale, nous obtenons $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$.

On joue à « Lights Out » simplement en additionnant des uplets!

14.4.2 Résolution de « Lights Out »

Considérons la configuration initiale de « Lights Out » (3×3) montrée à la figure 14.6.

On la représente mathématiquement à l'aide de $\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\0\\1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$. L'action d'appuyer sur un des carrés est obtenue en additionnant le 9-uplet correspondant dans la table suivante

Carré	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Uplet	$\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\\1\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\\1\\1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\1\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\1\\1\end{bmatrix}$

La configuration initiale peut-elle être obtenue à l'aide d'une combinaison linéaire des neuf actions? Autrement dit, peut-on trouver $x_i \in GF(2)$, $i = 1, \ldots, 9$ tels que

$$\sum_{i=1}^{9} x_i \mathbf{t}^{(i)} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\0\\1\\0\\1\\0\end{bmatrix},$$

où $\mathbf{t}^{(i)}$ est l'uplet du i-ième carré présenté au tableau ci-dessus?

Ceci correspond à résoudre le système

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 \\ x_2 + x_3 + x_6 \\ x_1 + x_4 + x_5 + x_7 \\ x_2 + x_4 + x_5 + x_6 + x_8 \\ x_3 + x_5 + x_6 + x_9 \\ x_4 + x_7 + x_8 \\ x_5 + x_7 + x_8 + x_9 \\ x_6 + x_8 + x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou, de façon équivalente, le système d'équations

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_6 &= 1 \\ x_1 + x_4 + x_5 + x_7 &= 1 \\ x_2 + x_4 + x_5 + x_6 + x_8 &= 0 \\ x_3 + x_5 + x_6 + x_9 &= 1 \\ x_4 + x_7 + x_8 &= 0 \\ x_5 + x_7 + x_8 + x_9 &= 1 \\ x_6 + x_8 + x_9 &= 0 \end{aligned}$$

dans $GF(2)$. Une solution en $x_1, \ldots, x_9$ indique lesquels de neuf carrés doivent être appuyés afin d'éteindre toutes les lumières, à partir de la configuration initiale.

Ainsi, la résolution de la version 3×3 de « Lights Out » revient à résoudre le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dans $GF(2)$, où

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \\ b_9 \end{bmatrix},$$

où $\mathbf{b}$ représente la configuration initiale.

La résolution du système sur $GF(2)$ donne

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 + b_3 + b_6 + b_7 + b_8 \\ b_5 + b_7 + b_8 + b_9 \\ b_1 + b_3 + b_4 + b_8 + b_9 \\ b_3 + b_5 + b_6 + b_9 \\ b_2 + b_4 + b_5 + b_6 + b_8 \\ b_1 + b_4 + b_5 + b_7 \\ b_1 + b_2 + b_6 + b_7 + b_9 \\ b_1 + b_2 + b_3 + b_5 \\ b_2 + b_3 + b_4 + b_7 + b_9 \end{bmatrix}.$$

Par exemple, si le carré en haut à gauche est le seul à être allumé initialement, la solution consiste à appuyer sur les carrés 1, 3, 6, 7, et 8, dans n'importe quel ordre (pourquoi?).

14.4.3 Compter les solutions

Rappelons que la version 3×3 de « Lights Out » peut être résolue en trouvant une solution du système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ dans $GF(2)$, où

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

Dans la section précédente, nous avons vu que la solution est donnée par

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} b_1 + b_3 + b_6 + b_7 + b_8 \\ b_5 + b_7 + b_8 + b_9 \\ b_1 + b_3 + b_4 + b_8 + b_9 \\ b_3 + b_5 + b_6 + b_9 \\ b_2 + b_4 + b_5 + b_6 + b_8 \\ b_1 + b_4 + b_5 + b_7 \\ b_1 + b_2 + b_6 + b_7 + b_9 \\ b_1 + b_2 + b_3 + b_5 \\ b_2 + b_3 + b_4 + b_7 + b_9 \end{bmatrix}.$$

Donc, peu importe la configuration initiale $\mathbf{b}$, il n'y a qu'une seule solution. La matrice $\mathbf{A}$ est inversible et sa nullité est zéro. Ce n'est pas le cas pour la version 4×4 de « Lights Out », cependant. La matrice $\mathbf{A}$ pour cette version se trouve ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice *n'est pas* inversible. Conséquemment, il y a des configurations initiales pour lesquelles on ne peut trouver de séquence de carrés à appuyer qui éteindra toutes les lumières

Il est possible de déterminer que la matrice des coefficients de la version 4×4 est de rang 12, ce qui implique que la nullité est de 4.

L'ensemble

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

est une base de $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$.

Chaque vecteur de $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ indique une suite de carrés sur lesquels on peut appuyer sans changer la configuration des lumières. Par exemple, le premier vecteur dans la base nous indique qu'en appuyant les carrés 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, et 13, on ne change par la configuration des lumières. (Rappel : le numérotage des carrés s'effectue de gauche à droite, par lignes, comme suit : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$)

Puisque nous travaillons sur $GF(2)$, tout les vecteurs de $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ ont la forme

$$u_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

où $u_1, u_2, u_3, u_4 \in \{0, 1\}$. Il y a donc $2^4 = 16$ vecteurs dans $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$. Autrement dit, pour tout configuration initiale pour lequel une solution $\mathbf{x}'$ existe, il existe en fait 16 telles solutions. Elles sont obtenues en ajoutant un élément $\mathbf{y} \in \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ à $\mathbf{x}'$.

Fait intéressant, il n'y a que quatre solutions différentes pour chaque configuration valide dans la version 5×5.

14.5 Codes de correction d'erreurs

De nos jours, les communications numériques utilisent la transmission de données binaires à travers un canal entaché de bruit. Par exemple, lorsque la sonde spatiale Voyager 2 transmet des images, ces dernières sont encodées à l'aide de bits : 0, 1. Lorsque les informations voyagent de la sonde à la Terre, elles soumises à plusieurs facteurs d'interférence. En conséquence, il est important à pouvoir détecter (et corriger) les erreurs dans les données reçues. Pour permettre la détection et la correction d'erreurs, la sonde doit transmettre des données supplémentaires.

La théorie du codage est l'étude des manières de minimiser cette quantité supplémentaire qui doit être transmise afin d'atteindre un certain niveau d'efficacité pour la détection et la corrections d'erreurs.

Dans cette section, nous allons présenter un avant-goût de ce vaste sujet. Plus particulièrement, nous allons voir comment utiliser les notions d'algèbre linéaire afin de construire des codes de correction d'erreurs.

Supposons que l'on désire transmettre des messages qui ne sont composés que des lettres « A », « G », « N » et « S ». Puisque l'on peut seulement transmettre des 0 et des 1, nous allons devoir encoder chaque lettre à l'aide une chaîne binaire. Par exemple, nous pouvons utiliser le code suivant :

A	00
G	01
N	10
S	11

Les chaînes binaires 00, 01, 10 et 11 sont les **mots de code**. La collection de tous les mots de codes forme l'ensemble des **codes binaires** . Pour transmettre le mot « SANG », par exemple, nous remplaçons simplement chaque lettre du mot par la chaîne binaire correspondante. On transmet alors 11001001 au canal de communication.

Si le canal est bruyant, une ou plusieurs des chiffres binaires peut être affectés. Par exemple, on pourrait recevoir 11001011 au lieu du mot envoyé, 11001001. Cette chaîne binaire correspond au message « SANS ». Puisque le message reçu est complètement valide (en tant que terme français), il n'y a aucune façon de savoir si c'est bien le message qui a été envoyé, ou si c'est le résultat d'une erreur.

Afin de détecter de telles erreurs, nous devoir utiliser des mots de codes qui sont suffisamment différents les uns des autres. Pour deux chaînes binaires de même longueur, la

distance de Hamming qui les sépare est le nombre de positions où ils sont différent. Par exemple, la distance de Hamming séparant 001 et 100 est de 2.

La distance minimale entre toutes les paires différentes de mots de code limite le nombre d'erreurs pouvant être détectées. Si on ne cherche qu'à détecter une seule erreur, la distance de Hamming minimale doit être d'au moins 2. Pour le code binaire présenté ci-dessus, la distance de Hamming minimale est de 1; nous sommes donc dans l'incapacité de détecter des erreurs. Nous pouvons par contre améliorer la situation en ajoutant un chiffre supplémentaire (le **bit de parité**) à la fin de chacun de mots de code. Le bit de parité est la somme (dans $GF(2)$) des chiffres des mots de code binaires :

A	000
G	011
N	101
S	110

Pour transmettre le message « SANG », on envoie la chaîne binaire 110000101011. Si une erreur se produit, disons à la troisième décimale, on reçoit plutôt 111000101011.

Puisque 111 n'est pas un mot de code, on sait qu'une erreur s'est produite. Malheureusement, suite à cette information seulement, il n'y a aucune façon de savoir si la lettre originale était « G », « N » ou « S » puisque ces trois lettres sont toutes à la même distance de Hamming de 111. Cet exemple illustre qu'une plus grande distance de Hamming est nécessaire à la correction des erreurs.

Une façon commune de générer des mots de codes binaires est d'utiliser l'espace des colonnes d'une matrice $\mathbf{G} \in GF(2)^{n\times k}$. (Autrement dit, nous représentons les chaînes binaires par des vecteurs dont les éléments se retrouvent dans $GF(2)$.) La matrice $\mathbf{G}$ est la **matrice génératrice** du code et chaque mot de code est dit généré par $\mathbf{G}$.

Exemple 14.2. L'ensemble des mots de code généré par la matrice génératrice $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ est $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Ce choix facilite la détection des erreurs. Soit $\{\mathbf{u}^1, \ldots, \mathbf{u}^m\}$ une base de $\mathrm{Ker}(\mathbf{G})$. Alors $\mathbf{c}$ est un mot de code généré par $\mathbf{G}$ si et seulement si

$$\mathbf{u}^{i\mathsf{T}}\mathbf{c} = 0$$

pour chaque $i = 1, \ldots, m$. En posant $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} {\mathbf{u}^1}^\mathsf{T} \\ \vdots \\ {\mathbf{u}^m}^\mathsf{T} \end{bmatrix}$, la condition s'exprime plus simplement par

$$\mathbf{Hc} = \mathbf{0}. \tag{14.1}$$

La **matrice de contrôle** $\mathbf{H}$ du code généré par $\mathbf{G}$ permet de déterminer efficacement si une chaîne donnée est un mot de code.

Exemple 14.3. La matrice de contrôle des mots de codes de l'exemple 14.2 est

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Notons que $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ n'est pas un mot de code généré par $\mathbf{G}$. On peut aussi le constater en remarquant que

$$\mathbf{Hr} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Terminons cette section avec une importante question : comment obtient-on une matrice génératrice bien adaptée? Nous n'allons pas donner de réponse ici : c'est un domaine de recherche très actif. Notons simplement qu'il y a deux choses très importantes à considérer. La première est le ratio $\frac{k}{n}$ (**taux d'informations**) du code. La seconde est la distance de Hamming minimale parmi toutes les pairs de mots de code distincts qui sont générées.

Exercices

1. Soit C un code binaire généré par $\mathbf{G}$. Pour un mot de code $\mathbf{c}$ non nul, soit $w(\mathbf{c})$ le nombre de 1 apparaissant dans $\mathbf{c}$. Montrez que la distance de Hamming minimale parmi toutes les paires distinctes de mots de code de C est donnée par

$$\min_{\mathbf{c} \in C, \mathbf{c} \neq \mathbf{0}} w(\mathbf{c}).$$

2. Considérons la matrice génératrice

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sur $GF(2)$.

a. Donnez une liste de tous les mots de code générés par $\mathbf{G}$.

b. Déterminez la distance de Hamming mininale parmi toutes les pairs de mots de code distincts.

c. Déterminez une matrice de contrôle pour le code binaire correspondant.

Remarque. Le code binaire généré par $\mathbf{G}$ est connu sous le nom de **Hamming(7,4)**.

14.6 Systèmes d'inéquations linéaires

Dans cette section, nous montrons que l'on peut utiliser les méthodes pour des systèmes linéaires afin de résoudre des systèmes d'inéquations linéaires.

Soient $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Supposons que l'on cherche à déterminer si le système

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}.$$

admet une solution, ce qui n'est le cas que si et seulement si le système suivant possède lui-même une solution :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{I}_m\mathbf{s} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{s} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

En réécrivant $\mathbf{x}$ sous la forme $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, où $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ avec $\mathbf{u}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0}$, nous obtenons le système équivalent

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{I}_m\mathbf{s} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{s} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous pouvons nous concentrer sur les systèmes de la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{14.2}$$

Nous avons donc un système d'équations linéaires pour lequel nous exigeons que les valeurs des variables soient non négatives.

On rappelle que si $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet une solution, alors il existe une solution qui a au plus m éléments non nuls puisque $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ est de dimension au plus \$ m\$. Fait surprenant, la même chose peut être dite du système (14.2).

Proposition 14.1. *Si* (14.2) *admet une solution, alors il existe une solution qui a au plus* m *éléments positifs.*

Démonstration. Soit $\mathbf{x}^*$ une solution de (14.2). Soit $J = \{i : \mathbf{x}_i^* > 0\}$. On choisit $\mathbf{x}^*$ de façon à ce que $|J|$ soit aussi petit que possible.

Supposons que $|J| > m$. Alors les colonnes de $\mathbf{A}$, indicées par les éléments de J, sont linéairement dépendantes. Il existe alors un vecteur non nul $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{d}_j = 0$ pour tout $j \notin J$. On peut supposer qu'au moins un des éléments de $\mathbf{d}$ soit négatif. (Sinon, il suffit de prendre la réciproque additive de chacun des éléments de $\mathbf{d}$.) Soit λ le nombre réel maximal tel que $\mathbf{x}^* + \lambda\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$, et posons $\mathbf{x}' = \mathbf{x}^* + \lambda\mathbf{d}$. Alors, $\mathbf{x}'$ est une solution de (14.2) puisque $\mathbf{x}' \geq \mathbf{0}$ et $\mathbf{A}\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}^* + \lambda\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{b}$. Cependant, $\mathbf{x}'$ a au moins une composante positive en moins que $\mathbf{x}^*$, ce qui contredit notre choix de $\mathbf{x}^*$. □

La proposition 14.1 nous suggère un algorithme naïf afin de résoudre (14.2) : on passe simplement en revue tous les sous-ensembles de colonnes de $\mathbf{A}$ formant une base de $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ et on vérifie s'il existe une combinaison linéaire non négative qui donne $\mathbf{b}$.

Exemple 14.4. Soient $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Notons que chaque paire de colonnes de $\mathbf{A}$ forme une base de $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$. Nous avons donc les résultats suivants :

— l'unique combinaison linéaire de $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ donnant $\mathbf{b}$ est $-\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$, qui n'est pas une combinaison linéaire non négative.
— l'unique combinaison linéaire de $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_3$ donnant $\mathbf{b}$ est $-2\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_3$, qui n'est pas une combinaison linéaire non négative.
— l'unique combinaison linéaire de $\mathbf{A}_2$ et $\mathbf{A}_3$ donnant $\mathbf{b}$ est $2\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_3$, qui n'est pas une combinaison linéaire non négative.

Donc, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ n'admet pas de solution d'après la proposition 14.1.

Cette méthode est relativement inefficace. Nous aimerions au moins éliminer des choix de colonnes qui sont évidemment peu prometteurs.

Pour faciliter la discussion, supposons que le rang de $\mathbf{A}$ soit m. L'ensemble $B \subseteq \{1, \ldots, n\}$ est appelé une **base** de $\mathbf{A}$ si les colonnes de $\mathbf{A}$, indicées par les éléments de B, forment une base de $\mathbb{R}^m$. (« Base d'indices » serait sans doute une appellation plus appropriée, mais c'est quand même assez long à écrire. Par convention, dans la littérature sur l'optimisation, on appelle simplement un tel ensemble une base.) Pour une base B, $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ est une **solution de base associée à** B si $\mathbf{Ax}^* = \mathbf{b}$ et $x_i^* = 0$ pour tout $i \notin B$.

On peut aussi effectuer une recherche plus systématique de la façon suivante : supposons que B soit une base déterminant la solution de base $\mathbf{x}^*$, où $x_r^* < 0$ pour un $r \in B$ particulier. Nous pouvons créer une nouvelle base B' en retirant l'indice r et en ajoutant un nouvel indice k. On continue cette approche jusqu'à l'obtention d'une solution de base ne possédant que des éléments non négatifs.

Il y a un problème potentiel : cette approche peut ne jamais se terminer. En fait, en ne choisissant pas bien les indices r et k, il est possible de se retrouver avec une base déjà rencontrée. On appelle un tel phénomène **cyclage**. Dans la section suivante, nous voyons qu'en choisissant les plus petits r et k à chaque reprise, l'algorithme devra nécessairement se terminer.

14.6.1 Trouver une solution de base admissible

Soient $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Supposons que $\mathbf{A}$ soit de rang m. L'algorithme suivant va déterminer si $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ admet une solution de base dont les éléments sont non négatifs que l'on appelle une **une solution de base admissible**.

Étapes :

1. Obtenir le système $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$, où $\mathbf{A}' = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}$ et $\mathbf{b}' = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b}$, et la solution de base $\mathbf{x}'$ associée à B.
2. Si $\mathbf{b}' \geq \mathbf{0}$, retourner B et s'arrêter. Sinon, chosir le plus petit indice r tel que $x'_r < 0$.
3. Soit $\mathbf{a}^\mathsf{T}$ la ligne de $\mathbf{A}$ telle que $a_r = 1$. Si $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}$, alors signaler qu'il n'y a aucune solution et s'arrêter. Sinon, choisir le plus petit indice k tel que $a_k < 0$.
4. Retirer r de B, ajouter k à B, et retourner à l'étape 1.

Le système $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ de l'étape 1 est **le tableau associé à** B. Chaque équation de ce tableau prend la forme

$$x_i + \sum_{j \notin B} \bar{a}_{ij} x_j = \beta_i, \ \forall i \in B.$$

On appelle $x_i + \sum_{j \notin B} \bar{a}_{ij} x_j = \beta_i$ la **rangée (du tableau) associée à** x_i. Ainsi, pour chaque $i \in B$, x'_i prend la valeur du côté droit de la rangée associée à x_i.

Avant d'analyser l'algorithme, nous présentons un exemple.

Supposons que l'on cherche une solution de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, où $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Puisque les trois premières colonnes de $\mathbf{A}$ sont linéairement indépendantes, nous pouvons débuter avec $B = \{1, 2, 3\}$.

Itération 1 :

1. Pour obtenir le tableau associé à $B = \{1, 2, 3\}$, nous n'avons pas besoin de calculer $\mathbf{A}_B^{-1}$ explicitement. Nous devons simplement réduire la matrice augmentée de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ de sorte que les colonnes indicées par les éléments de B forment la matrice identité

:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow -L_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow -L_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

La solution de base associée à B est alors $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2. Choisissons $r = 2$ puisque c'est le plus petit indice i tel que $x'_i < 0$.
3. Choisissons $k = 4$ puisque c'est le plus petit indice k tel que le coefficient de x_k dans la rangée associée à x_2 est négatif.
4. La nouvelle base est alors $B = \{1, 3, 4\}$.

Itération 2 :

1. On obtient le tableau associé à $B = \{1, 3, 4\}$:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

   Donc, la solution de base déterminé par B est $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$.

2. Choisissons $r = 3$ puisque c'est le plus petit indice i où $x'_i < 0$.
3. Choisissons $k = 5$ puisque c'est le plus petit indice k tel que le coefficient de x_k dans la rangée associée à x_3 est négatif. (Notons que la rangée associée à x_3 correspond à la deuxième ligne de la dernière matrice augmentée ci-dessus.)
4. La nouvelle base est alors $B = \{1, 4, 5\}$.

Itération 3 :

1. On obtient le tableau associé à $B = \{1, 4, 5\}$:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow -\frac{2}{3}L_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Donc, la solution de base déterminée par B est $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2. On s'arrête ici car le côté droit du tableau ne contient que des valeurs non négatives.

On peut aussi constater que $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ satisfait à $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

Remarque. L'algorithme présentée ci-dessus est en fait une spécialisation de l'algorithme du simplexe dual qui utilise la règle d'anti-cyclage de Robert Bland pour programmation linéaire.

14.6.2 Analyse de la méthode

Lors de l'étape 2, on peut s'arrêter lorsque $\mathbf{b}' \geq \mathbf{0}$ car pour chaque $j \in \{1, \ldots, n\}$, x'_j est nul ou un des élément de $\mathbf{b}'$.

L'étape 3 jette un regard sur la rangée du tableau associée à x_r :

$$x_r + \sum_{j \notin B} \bar{a}_{rj} x_j = \beta_r. \tag{14.3}$$

Par choix de r, on sait que $\beta_r < 0$. Mais si $\bar{a}_{rj} \geq 0$ pour tout $j \notin B$, le côté gauche de l'équation (14.3) n'est jamais négatif pour toutes les solutions de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, ce qui implique que le système n'admet aucune de solution admissible.

Pour l'indice k choisit à l'étape 3, le coefficient de x_k est négatif dans la rangée associée à x_r . Donc, les colonnes de $\mathbf{A}'$, indicées par la nouvelle base B formé à l'étape 4, sont linéairement indépendantes. Puisque $\mathbf{A}' = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}$, on constate que les colonnes de $\mathbf{A}$ sont aussi linéairement indépendantes, ce qui implique que le nouveau B est aussi une base pour $\mathbf{A}$.

Montrons maintenant que l'algorithme se termine.

Supposons, par contradiction, que l'algorithme ne se termine pas. Soit $B_1, B_2, \ldots$ la suite des bases que l'algorithme rencontre. Autrement dit, B_i dénote la base au début de la i-ième itération pour chaque $i = 1, 2, \ldots$. Soit $\mathbf{x}^{(i)}$ la solution de base associée à B_i pour chaque $i = 1, 2, \ldots$.

Puisqu'il n'existe qu'un nombre fini de bases différentes, on peut trouver $s < t$ tel que $B_s = B_t$. Soit r_p l'indice retiré de B_p pour tout $p \in \{s, \ldots, t\}$. Posons $h = \max\{r_s, \ldots, r_t\}$. Puisque $B_t = B_s$, il doit y avoir $q \in \{s, t-1\}$ tel que h a été ajouté à la base à la q-ième itération.

Soit i l'indice choisit pour être retiré de la base lors de la q-ième itération. Puisque h fût ajouté à la base lors de l'itération q, $i \neq h$. De plus, aucun indice plus élevé que h peut être retiré lors de l'itération q. Ainsi, nous avons $i < h$.

Puisque la rangée associée à x_i est une équation du système $\mathbf{A}_{B_q}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}_{B_q}^{-1}\mathbf{b}$, elle est égale à

$$\mathbf{d}^\mathsf{T}\mathbf{Ax} = \mathbf{d}^\mathsf{T}\mathbf{b},$$

où $\mathbf{d}^\mathsf{T}$ est une ligne de $\mathbf{A}_{B_q}^{-1}$.

Nous avons donc $0 > x_i^{(q)} = \mathbf{d}^\mathsf{T}\mathbf{b} = \mathbf{d}^\mathsf{T}(\mathbf{Ax}^{(p)}) = (\mathbf{d}^\mathsf{T}\mathbf{A})\mathbf{x}^{(p)} = \sum_{j=1}^{n}(\mathbf{d}^\mathsf{T}\mathbf{A}_j)x_j^{(p)}$. Ainsi, il existe j' tel que $(\mathbf{d}^\mathsf{T}\mathbf{A}_{j'})x_{j'}^{(p)} < 0$, d'où $j' \in B_p$.

Supposons que $j' < h$. Puisque à la p-ième itération, $r = h$ fût le plus petit indice tel que $x_r^{(p)} < 0$ à l'étape 2, alors $x_{j'}^{(p)} \geq 0$. De plus, à la q-ième itération, $k = h$ fût le plus petite indice à l'étape 3 ayant été ajouté à la base, nous avons $\mathbf{d}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}_{j'} \geq 0$, d'où $(\mathbf{d}^T\mathbf{A}'_j)x_{j'}^{(p)} \geq 0$, ce qui est une contradiction. Ainsi, $j' \geq h$.

Supposons maintenant que $j' = h$. Puisque on a ajouté h à la base lors de la q-ième itération, nous devons avoir $\mathbf{d}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}_{j'} < 0$. Mais on a retiré h lors de la p-ième itération. Ainsi, $x_{j'}^{(p)} < 0$, ce qui implique que $(\mathbf{d}^T\mathbf{A}'_j)x_{j'}^{(p)} > 0$, une contradiction.

Finalement, supposons que $j' > h$. Puisque h est le plus grand indice qui l'on a retiré d'une base lors entre la p-ième itération et la q-ième itération, j' doit également se retrouver dans B_q, ce qui implique que $\mathbf{d}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}_{j'} = 0$ puisque $i < h < j'$ et puisque le coefficient de x_j dans la rangée associée à x_i est nul pour chaque élément $j \in B_p$ autre que i. Ceci contredit que $(\mathbf{d}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}'_j)x_{j'}^{(p)} < 0$.

Ainsi, j' n'existe pas, ce qui est une contradiction, d'où algorithme se termine.

Exercices

1. Pour chacun des problèmes suivants, appliquez la méthode du simplexe au système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ en débutant avec la base donnée B :

   a. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \{2, 3\}$.

   b. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $B = \{1, 2\}$.

Solutions

1. a. **Itération 1** :

   1. On obtient le tableau associé à $B = \{2, 3\}$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow -L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

   Donc, la solution de base associée à B est $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   2. Choisissons $r = 3$ puisque c'est le plus petit indice i tel que $x'_i < 0$.
   3. Choisissons $k = 4$ puisque c'est le plus petit indice k tel que le coefficient de x_k dans la rangée associée à x_3 est négatif.
   4. La nouvelle base est alors $B = \{2, 4\}$.

   Itération 2 :

   1. On obtient le tableau associé à $B = \{2, 4\}$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow -L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Donc, la solution de base déterminée par B est $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2. On s'arrête ici car $\mathbf{x}'$ est une solution de base admissible.

b. **Itération 1** :

1. On obtient le tableau associé à $B = \{1, 2\}$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

Donc, la solution de base déterminée par B est $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2. Choisissons $r = 2$ puisque c'est le plus petit indice i tel que $x'_i < 0$.
3. Choisissons $k = 4$ puisque c'est le plus petit indice k tel que le coefficient de x_k dans la rangée associée à x_2 est négatif.
4. La nouvelle base est alors $B = \{1, 4\}$.

Itération 2 :

1. On obtient le tableau associé à $B = \{1, 4\}$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow -L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Donc, la solution de base déterminée par B est $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2. On s'arrête ici car $\mathbf{x}'$ est une solution de base admissible.

Bibliographie

Abril, D., Torra, V. & Navarro-Arribas, G., (2015), Supervised Learning Using a Symmetric Bilinear Form for Record Linkage, *Inf. Fusion*, vol. 26, n°C, p. 144-153.

Bertsekas, D., (2016), *Nonlinear Programming*, Athena Scientific.

Crowe, M., (1967), *A History of Vector Analysis: The Evolution of the Idea of a Vectorial System*, Dover.

Golub, G. & Van Loan, C., (1996), *Matrix Computations*, Johns Hopkins University Press.

James, M., (1978), The Generalised Inverse, *Mathematical Gazette*, vol. 62, p. 109-114.